სავარჯიშოები

1. გააწარმოეთ შემდეგი ფუნქციები

1.1. $y=\dfrac{3x+8}{15}$;

1.2. $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$;

1.3. $y=e^{e^x}$;

1.4. $y=\sin^5 x$;

1.5. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{x}{b}\right)^a$, $a>0$, $b>0$;

1.6. $y=4\ln(x^2+1)$;

1.7. $y=\dfrac{1}{1+x^4}$;

1.8. $y=\cos(\cos x)$;

1.9. $y=\sqrt{1+x^2}$;

1.10. $y=x^x$;

1.11. $y=x^{\sin x}$.

2. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლოკალური ექსტრემუმები

2.1. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+4$;

2.2. $y=x+\dfrac{1}{x}$;

2.3. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

2.4. $y=4x-x^4$;

2.5. $y=2\sqrt{x}-x$;

2.6. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$;

2.7. $y=x\ln x$.

3. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზემოთ და ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედები და გადალუნვის წერტილები:

3.1. $y=x^2-6x+7$;

3.2. $y=-x^2+4x-5$;

3.3. $y=x+\dfrac{1}{x}$;

3.4. $y=x^2-\dfrac{1}{x^2}$;

3.5. $y=x^4-2x^2$;

3.6. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;

3.7. $y=e^{-x^2}$.

4. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკების ასიმპტოტები:

4.1. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$;

4.2. $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2+5}$;

4.3. $y=\dfrac{2}{3+4x}$;

4.4. $y=x+\dfrac{2}{x-3}$;

4.5. $y=x-\dfrac{7}{x}$;

4.6. $y=\dfrac{3x^3}{x^2+16}$;

4.7. $y=\sqrt{x^2-1}$;

4.8. $y=xe^x$.

5. შემდეგი ფუნქციები გამოიკვლიეთ დიფერენციალური მეთოდის გამოყენებით და ააგეთ მათი გრაფიკები:

5.1. $y=2x^2-32;$

5.2. $y=3x^3-27;$

5.3. $y=5x^{1/2}+25;$

5.4. $y=4x+16;$

5.5. $y=8x^2+20;$

5.6. $y=x^2-25;$

5.7. $y=\dfrac{2}{x}-1;$

5.8. $y=\dfrac{3}{x}+1;$

5.9. $y=2^x;$

5.10. $y=0.5^x;$

5.11. $y=\log_3 x;$

5.12. $y=\log_{0.7} x;$

5.13. $y=x^4+4x^3+7;$

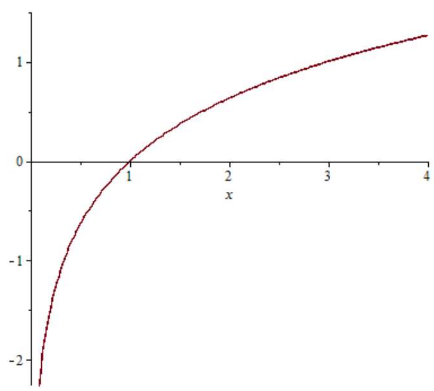
5.14. $y=\dfrac{x+1}{x-1};$

5.15. $y=\dfrac{x+1}{x^2};$

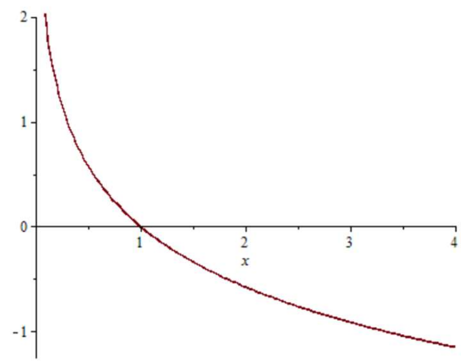
5.16. $y=\dfrac{x^2+2x-4}{x^2}.$

6.

6.1. მოცემული ორი გრაფიკიდან რომელი შეესაბამება $y=\log_{0.3} x$ ფუნქციას?

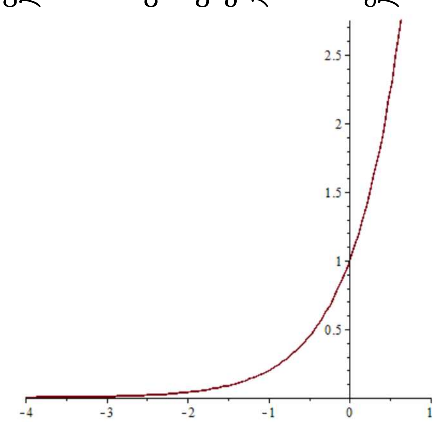


a)

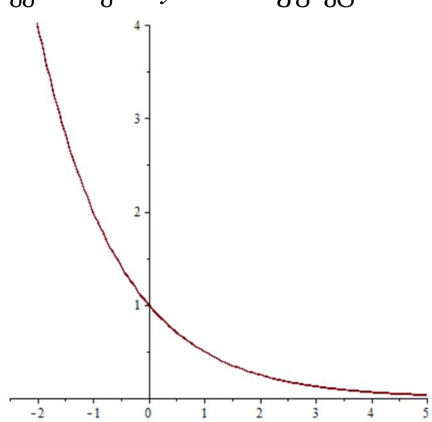


b)

6.2. მოცემული ორი გრაფიკიდან რომელი შეესაბამება $y=0.5^x$ ფუნქციას



a)



b)

7. ანტიწარმოებულების ცხრილის ფორმულების გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

7.1. $\int (3-x^2)^2\,dx;$

7.2. $\int x^2(5-x)dx;$

7.3. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx;$

7.4. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;$

7.5. $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx;$

7.6. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx;$

7.7. $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx;$

7.8. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx;$

7.9. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx;$

7.10. $\int \left(2^x+3^x\right)^2 dx;$

7.11. $\int_{-1}^{2} x^2 dx;$

7.12. $\int_0^1 3^x\,dx;$

7.13. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2};$

7.14. $\int_1^e \frac{dx}{x};$

7.15. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx;$

7.16. $\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx;$

7.17. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

7.18. $\int_a^b x^m dx \quad (0<a<b;\ m\neq -1).$

8. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

8.1. $\int x\sin x\,dx;$

8.2. $\int x\cos x\,dx;$

8.3. $\int \ln x\,dx;$

8.4. $\int x^2 e^x\,dx;$

8.5. $\int x\ln x\,dx;$

8.6. $\int x^2 \sin x\,dx;$

8.7. $\int x^n \ln x\,dx \quad (n\neq -1);$

8.8. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;$

8.9. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx;$

8.10. $\int x e^{-x}\,dx;$

8.11. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx;$

8.12. $\int x\,sh\,x\,dx;$

8.13. $\int x^3\,ch\,3x\,dx;$

8.14. $\int arctg\,x\,dx;$

8.15. $\int \arcsin x\,dx;$

8.16. $\int x\,arctg\,x\,dx;$

8.17. $\int x^2 \arccos x\,dx;$

8.18. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx;$

8.19. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx;$

8.20. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx;$

8.21. $\int arctg\sqrt{x}\,dx;$

8.22. $\int \sin x\cdot\ln(tg\,x)\,dx;$

8.23. $\int x^5 e^{x^3}\,dx$;

8.24. $\int (\arcsin x)^2\,dx$;

8.25. $\int x(arctg\,x)^2\,dx$;

8.26. $\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$;

8.27. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

8.28. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$;

8.29. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$;

8.30. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

8.31. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$;

8.32. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx$;

8.33. $\int x\sin^2 x\,dx$;

8.34. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$;

8.35. $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$;

8.36. $\int \frac{xe^{arctg\,x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$;

8.37. $\int \frac{e^{arctg\,x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$;

8.38. $\int \sin(\ln x)dx$;

8.39. $\int \cos(\ln x)dx$;

8.40. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$;

8.41. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$;

8.42. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$;

8.43. $\int (e^x-\cos x)^2\,dx$;

8.44. $\int \frac{arctg\,e^x}{e^x}\,dx$;

8.45. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$;

8.46. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

8.47. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$;

8.48. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$;

8.49. $\int_0^{e} \ln x\,dx$;

8.50. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$;

8.51. $\int_0^{e} x\ln x\,dx$.

9. ჩასმის ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

9.1. $\int \sqrt{5x+8}dx$;

9.2. $\int \frac{dx}{x-10}$;

9.3. $\int \frac{4x^3dx}{x^4+1}$;

9.4. $\int \frac{e^x dx}{e^x+3}$;

9.5. $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$;

9.6. $\int e^{5x}dx$.

9.7. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2+x^3}}$;

9.8. $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$;

9.9. $\int \frac{x^2}{x+1}dx$;

9.10. $\int x\sqrt{1+x^2}dx$;

9.11. $\int xe^{-x^2}dx$;

9.12. $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$;

9.13. $\int tgxdx$;

9.14. $\int ctgxdx$;

9.15. $\int_2^4 \frac{dx}{x+1}$;

9.16. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{1+x^2}$;

9.17. $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$;

9.18. $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$;

9.19. $\int_0^{\pi} \frac{-\sin x\,dx}{\cos x+4}$.

10. გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

10.1. $\int \frac{1}{a+bx^2}dx \quad (ab \neq 0)$;

10.2. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$;

10.3. $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)}$;

10.4. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

10.5. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

11. გამოთვალეთ შემდეგი პირველი გვარის წირითი ინტეგრალები l წირის გასწვრივ

11.1. $\int_l x^2yds,$ სადაც l არის $y=x$ წრფის ნაწილი, კოორდინატთა სისტემის სათავიდან $(2;2)$ წერტილამდე.

11.2. $\int_l y^2ds,$ სადაც l არის $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ წრეწირის $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ რკალი.

11.3. $\int_l x^2ds,$ სადაც l არის წირი $y=\ln x,\ 1 \le x \le e.$

11.4. $\int_l ds,$ სადაც l არის წრფის ნაწილი, კოორდინატთა სისტემის სათავიდან $A(1;2)$ წერტილამდე.

11.5. $\int_l (x^2+y^2)zds,$ სადაც l წირი მოცემულია პარამეტრული სახით $r(t)=(\sin 3t,\cos 3t,4t)\,,\quad 0 \le t \le \pi$.

11.6. $\int_l xyds,$ სადაც l წირი არის $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის ნაწილი, რომელიც მდებარეობს პირველ კვადრანტში.

12. გამოთვალეთ შემდეგი მეორე გვარის წირითი ინტეგრალები L წირის გასწვრივ

12.1. $\int_L 2xydx-x^2dy,$ სადაც L არის წრფის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს $O(0;0)$ და $A(2;1)$ წერტილებს.

12.2. $\int_L \frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, სადაც L არის $A(1;1)$ და $B(2;2)$ წერტილების შემაერთებელი $y=x$ წრფის მონაკვეთი.

12.3. $\int_L \cos y\,dx - \sin x\,dy$, სადაც L არის $A(2;-2)$ და $B(-2;2)$ წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი.

12.4. $\int_L -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$, სადაც L არის $O(0;0)$ და $M(\pi;2\pi)$ წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი.

12.5. $\int_L (x^2-y^2)dy$, სადაც L არის $y=x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $O(0;0)$ და $A(2;4)$ წერტილებს შორის.

12.6. $\int_L 2xydx - y^4dy$, სადაც L არის $x=2y^2$ პარაბოლის რკალი მოთავსებული $O(0;0)$ და $A(2;1)$ წერტილებს შორის.

12.7. $\int_L (4x-y)dx + 5x^2ydy$, სადაც L არის $y=3x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $O(0;0)$ და $A(1;3)$ წერტილებს შორის.

12.8. $\int_L (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$, სადაც L არის $y=x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $A(-1;1)$ და $B(1;1)$ წერტილებს შორის.

13. გამოთვალეთ შემდეგი მეორე გვარის წირითი ინტეგრალები შეკრულ კონტურზე:

13.1. $\oint_L xdy - ydx$, სადაც L წარმოადგენს R რადიუსიან წრეწირს, რომლის ცენტრიც მდებარეობს კოორდინატთა სისტემის სათავეში და ინტეგრება ხდება:
ა) საათის ისრის მოძრაობის საწინაარმდეგო მიმართულებით;
ბ) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

13.2. $\oint_L xy^2dy - yx^2dx$, სადაც L წირი (კონტური) წარმოადგენს $x^2+y^2=4$ წრეწირს და ინტეგრება ხდება:
ა) საათის ისრის მოძრაობის საწინაარმდეგო მიმართულებით;
ბ) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

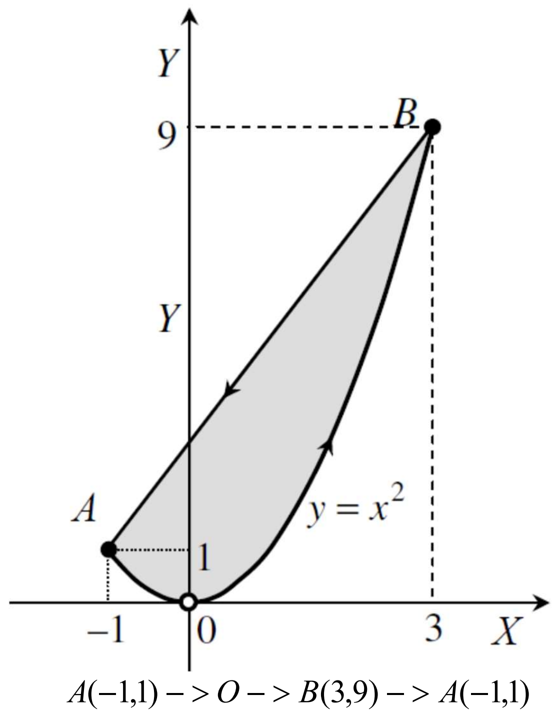
13.3. $\oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$, სადაც L წირი (კონტური) წარმოადგენს სამკუთხედს, რომლის წვეროებია: $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$ და ინტეგრება ხდება:
ა) საათის ისრის მოძრაობის საწინაარმდეგო მიმართულებით;
ბ) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

13.4. $\oint_L (y+2x)dx + 2(x+y)dy$, სადაც L კონტური $y=4x^2$, $y=4$, $x=0$ წირებით შემოსაზღვრული არის საზღვარია და ინტეგრება ხდება:

ა) საათის ისრის მოძრაობის საწინაარმდეგო მიმართულებით;

ბ) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

13.5. $\oint_L ydx + x^2dy$, სადაც L წირი (კონტური) წარმოადგენს $y=x^2$ პარაბოლის AOB რკალითა და BA წრფით შემოსაზღვრული არის საზღვარს და ინტეგრება ხდება მითითებული მიმართულებით (იხ. ნახ. 13.5)



ნახ. 13.5

14. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $y' = 2\sqrt{y}$; ბ) $y' + y - 2\cos x = 0$; გ) $(x-y)y' - y = 0$

განტოლებების ამონახსნებია შესაბამისად

ა) $y = (x+C)^2$; ბ) $y = Ce^{-x} + \cos x + \sin x$; გ) $\ln y + \frac{x}{y} = C$

ფუნქციები, სადაც $C = const$.

15. იპოვეთ განცალებადცვლადებიანი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

15.1. $xy' - y = 0;$

15.2. $y' = xy;$

15.3. $y' = \frac{x}{y};$

15.4. $y' = (x+1)y;$

15.5. $y' = (5x+2)y$;

15.6. $y' = y\sin x$;

15.7. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$;

15.8. $(1+y^2)dx + xydy = 0$;

15.9. $xyy' = 1 - x^2$;

15.10. $y' tgx = y$;

15.11. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$;

15.12. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

15.13. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$;

15.14. $xy' + x = x^2$;

15.15. $y' = 10^{x+y}$;

15.16. $y' = \sqrt{1-y^2}$;

15.17. $y' = \dfrac{y^2 - 2y}{2x}$;

15.18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

16. შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებისთვის ამოხსენით კოშის მითითებული ამოცანები:

16.1. $y'(x) = 3x^2 - 2x + 1,\quad y(1) = 2$;

16.2. $xy'(x) - y(x) = 0,\quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$;

16.3. $y'(x) = y(x),\quad y(-2) = 2$;

16.4. $y'(x) = 5x^3 + \cos x,\quad y(0) = 4$;

16.5. $y'(x) = 3x^2 + \sin x,\quad y(0) = 3$;

16.6. $y'(x) = 2x^5 + e^x,\quad y(0) = 2$;

16.7. $y'(x) = 5\sin x + 9\cos x,\quad y(\pi) = 1$;

16.8. $y'(x) = 3e^x + x^7 + 2,\quad y(0) = 7$.

17. იპოვეთ შემდეგი პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

17.1. $y' + 2y = 4x$;

17.2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

17.3. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

17.4. $y' + y = \cos x$;

17.5. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$;

17.6. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$;

17.7. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$;

17.8. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3$;

17.9. $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy$;

17.10. $y^2dx - (2xy+3)dy = 0$;

17.11. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$;

17.12. $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$;

17.13. $ydx + (x - \dfrac{1}{2}x^3y)dy = 0$;

17.14. $3xdy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)dx$;

17.15. $x'(t) - \dfrac{1}{t}x(t) = t^2$.

18. იპოვეთ შემდეგი მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

18.1. $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0$;

18.2. $y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = 0$;

18.3. $y''(x) + y'(x) - 30y(x) = 0$;

18.4. $y''(x) - y'(x) - 20y(x) = 0$;

18.5. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$;

18.6. $y''(x) - 4y'(x) = 0$;

18.7. $y''(x) + 6y'(x) + 13y(x) = 0;$

18.8. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0;$

18.9. $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0;$

18.10. $y''(x) + 4y'(x) + 29y(x) = 0.$

19. იპოვეთ შემდეგი ერთგვაროვანი არაწრფივი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

19.1. $y' = -\dfrac{x+y}{x+2y};$

19.2. $y' = \dfrac{x+y}{x+2y};$

19.3. $y' = \dfrac{x^2+y^2}{4x^2+y^2};$

19.4. $y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}};$

19.5. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x};$

19.6. $y' = \dfrac{y}{x} - 1;$

19.7. $y' = -\dfrac{x+y}{x};$

19.8. $(y-x)ydx - x^2dy = 0;$

19.9. $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0;$

19.10. $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y};$

19.11. $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}.$

20. ამოხსენით შემდეგი განტოლებები სრულ დიფერენციალებში:

20.1. $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0;$

20.2. $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0;$

20.3. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0;$

20.4. $\left(2xy + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (xy^2 + x^2)dy = 0;$

20.5. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0;$

20.6. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0;$

20.7. $x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0;$

20.8. $2xydx + (y^2 + x^2)dy = 0;$

20.9. $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0;$

20.10. $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0.$

21. იპოვეთ ბერნულის და რიკატის შემდეგი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

21.1. $y' = \dfrac{4y}{x} + x\sqrt{y};$

21.2. $y' = \dfrac{1}{x}y - \dfrac{y^2}{x};$

21.3. $y' = y + xy^2;$

21.4. $xy' - 2y = 4x^3y^{1/2};$

21.5. $y' - \left(\dfrac{1}{x} + 2x^4\right)y = x^3y^2;$

21.6. $y' = -x^2 + \dfrac{y}{x} + x^3y^2.$

22. იპოვეთ შემდეგი ნორმალური სახის პირველი რიგის სიმეტრიული ფორმის სისტემების ზოგადი ამონახსნები:

22.1. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$;

22.2. $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$;

22.3. $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy}$;

22.4. $\frac{dx}{x+2y}=\frac{dy}{ay}$, სადაც a ნებისმიერი მუდმივია.

სავარჯიშოების შესრულებისათვის საჭირო ზოგიერთი ფორმულა და ფაქტი

ზოგიერთი ფუნქციის წარმოებულისა და ანტიწარმოებულების ცხრილი:

$\frac{dx^n}{dx}=(x^n)'=nx^{n-1}$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\quad n\neq -1,\ c=const$
$\frac{de^x}{dx}=(e^x)'=e^x$	$\int e^x dx=e^x+c,\quad c=const$
$\frac{da^x}{dx}=(a^x)'=a^x\ln a,\ a>0$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c,\quad a>0,\ c=const$
$\frac{d\ln x}{dx}=(\ln x)'=\frac{1}{x},\ x>0$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+c,\ x>0,\ c=const$
$\frac{d\log_a x}{dx}=(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},$ $x>0,\ a>0$	
$\frac{d\sin x}{dx}=(\sin x)'=\cos x$	$\int \cos x dx=\sin x+c,\quad c=const$
$\frac{d\cos x}{dx}=(\cos x)'=-\sin x$	$\int \sin x dx=-\cos x+c,\quad c=const$
$\frac{dtgx}{dx}=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c,\quad c=const$
$\frac{dctgx}{dx}=(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c,\quad c=const$
$\frac{d\arcsin x}{dx}=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+c\\ -\arccos x+c\end{cases},\ c=const$
$\frac{d\arccos x}{dx}=(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\frac{d\ arctgx}{dx}=(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}arctgx+c\\ -arcctgx+c\end{cases},\ c=const$
$\frac{d\ arcctgx}{dx}=(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$	
$\frac{d\,\mathrm{ch}\,x}{dx}=(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$	$\int \mathrm{sh}\,x dx=\mathrm{ch}\,x+c,\ c=const$
$\frac{d\,\mathrm{sh}\,x}{dx}=(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$	$\int \mathrm{ch}\,x dx=\mathrm{sh}\,x+c,\ c=const$
$\frac{d\,\mathrm{cth}\,x}{dx}=(\mathrm{cth}\,x)'=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}=-\mathrm{cth}\,x+c,\ c=const$
$\frac{d\,\mathrm{th}\,x}{dx}=(\mathrm{th}\,x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}=\mathrm{th}\,x+c,\ c=const$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c,\ c = const$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c,\ c = const$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + c \\ -\dfrac{1}{a} arcctg\dfrac{x}{a} + c \end{cases},\quad a \neq 0,\qquad c = const$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c,\quad a \neq 0,\qquad c = const$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + c \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + c \end{cases},\quad a > 0,\ c = const$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c,\ a > 0,\quad c = const$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c,\ c = const$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c,\ c = const$$

წარმოებულის თვისებები:

1. $(const)' = 0$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $(cf(x))' = cf'(x),\quad c = const$
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},\qquad g(x) \neq 0$
6. $f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

ვთქვათ, f და g ფუნქციები ინტეგრებადია $[a,b]$-ზე და c მუდმივია, მაშინ:

1. $\int_a^b cf = c\int_a^b f,\qquad c = const$
2. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
3. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, სადაც $c \in]a,b[$

4. $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

5. თუ $f \le g$ და $a < b$, მაშინ $\int_a^b f \le \int_a^b g$

კალკულუსის ძირითადი თეორემა

თეორემა. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა ღია ინტერვალზე, რომელიც $[a,b]$ სეგმენტს შეიცავს, მაშინ:

1. $\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = f(b)$; (1)

2. თუ $f(x) = F'(x)$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)$. (2)

(2) ფორმულას *ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა* ეწოდება. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი, პრიმიტიული ფუნქცია. მას უწოდებენ აგრეთვე ანტიწარმოებულს ან *განუსაზღვრელ ინტეგრალს* და წერენ $\int f(x)dx$ ფორმითაც.

ფუნქციის დიფერენციალი:
$df(x) = f'(x)dx$

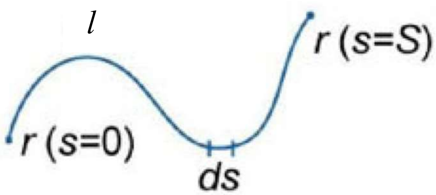
ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულები:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\,;$$

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx\ .$$

პირველი გვარის წირითი ინტეგრალის თვისებები

დავუშვათ l ნებისმიერი წირია, რომელიც აღიწერება $r = r(s),\ 0 \le s \le S$; განტოლებით, სადაც s წირის რკალის სიგრძეა (იხ. ნახ. 1).



ნახ. 1

პირველი გვარის წირითი ინტეგრალს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული წირის ორიენტაციაზე;
2. თუ გლუვი l წირი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ორი l_1 და l_2 წირის გაერთიანება, მაშინ
$$\int_l F(x,y,z)ds = \int_{l_1} F(x,y,z)ds + \int_{l_2} F(x,y,z)ds;$$
3. თუ გლუვი l წირი მოცემულია პარამეტრული სახით: $r = r(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$, და F ფუნქცია უწყვეტია l-ზე, მაშინ
$$\int_l F(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\,;$$
4. თუ გლუვი l გლუვი წირია Oxy სიბრტყეზე, რომელიც მოცემულია განტოლებით: $y = f(x),\ \ a \le x \le b$, მაშინ
$$\int_l F(x,y)ds = \int_a^b F(x,f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,;$$
5. თუ Oxy სიბრტყეზე l გლუვი წირი მოცემულია შემდეგი განტოლებით: $x = f(y),\ \ c \le x \le d$, მაშინ
$$\int_l F(x,y)ds = \int_a^b F(f(y),y)\sqrt{(f'(y))^2 + 1}\,dy\,;$$
6. პოლარულ კოორდინატებში $\int_l F(x,y)ds$ გამოიითვლება შემდეგი ფორმულით
$$\int_l F(x,y)ds = \int_\alpha^\beta F(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\,,$$
სადაც $r = r(\theta),\ \theta \in [\alpha,\beta]$, წარმოადგენს l წირის განტოლებას პოლარ კოორდინატებში.

მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის თვისებები

1. $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = -\int\limits_{BA} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

2. თუ $y=\varphi(x)$ არის L წირის განტოლება, მაშინ

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \{P[x,\varphi(x)] + Q[x,\varphi(x)]\,\varphi'(x)\}\,dx,$$

სადაც a და b, შესაბამისად, წირის A და B წერტილების აბსცისებია.

3. თუ წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$ და $z=z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, მაშინ

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt,$$

სადაც t_1 და t_2 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება A და B წერტილებს.

პასუხები:

1.1 $\frac{1}{5}$; **1.2** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$; **1.3** e^{e^x+x}; **1.4** $5\sin^4 x\cos x$;

1.5 $\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\left[\left(\frac{x}{b}\right)\ln\frac{a}{b}+a\right]$; **1.6** $\frac{8x}{x^2+1}$; **1.7** $-\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$; **1.8** $\sin(\cos x)\cdot\cos x$;

1.9 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; **1.10** $x^x(\ln x+1)$; **1.11** $x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

2.1 $x_{\max}=0,\ y_{\max}=4;\ x_{\min}=1,\ \ y_{\min}=3\frac{5}{6}$; **2.2** $x_{\max}=-1,\ y_{\max}=-2;\ x_{\min}=1,\ \ y_{\min}=2$;

2.3 $x_{\max}=0,\ y_{\max}=-2;\ x_{\min}=2,\ \ y_{\min}=2$; **2.4** $x_{\max}=1,\ y_{\max}=3$;

2.5 $x_{\max}=1,\ y_{\max}=1;\ x_{\min}=0,\ \ y_{\min}=0$;

2.6 $x_{\max}=2,\ y_{\max}=\frac{1}{4};\ x_{\min}=-2,\ \ y_{\min}=-\frac{1}{4}$; **2.7** $x_{\min}=\frac{1}{e},\ \ y_{\min}=-\frac{1}{e}$.

3.1. ქვემოთ ამოზნექილია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს;

3.2. ამოზნექილია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს;

3.3. ქვემოთ ამოზნელქილია $(0,+\infty)$, ზემოთ ამოზნექილია $(-\infty,0)$, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს;

3.4. ქვემოთ ამოზნელქილია $\left(-\infty;\sqrt[4]{3}\right)\cup\left(\sqrt[4]{3};+\infty\right)$, ზემოთ ამოზნექილია $\left(-\sqrt[4]{3};0\right)\cup\left(0;\sqrt[4]{3}\right)$, გადაღუნვის წერტილებია $x_1=-\sqrt[4]{3},\ y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ და $x_2=\sqrt[4]{3},\ y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

3.5. ქვემოთ ამოზნელქილია $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$, ზემოთ ამოზნექილია $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, გადაღუნვის წერტილებია $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ y_1=-\frac{5}{6}$ და $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3},\ y_1=-\frac{5}{6}$;

3.6. ქვემოთ ამოზნელქილია $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$, ზემოთ ამოზნექილია $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, გადაღუნვის წერტილებია $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ y_1=-\frac{3}{4}$ და $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}},\ y_1=\frac{3}{4}$;

3.7. ქვემოთ ამოზნელქილია $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$, ზემოთ ამოზნექილია $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, გადაღუნვის წერტილებია $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_1=e^{-\frac{1}{2}}$ და $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_1=e^{-\frac{1}{2}}$.

4.1. $y=0, \quad x=\pm 2$; **4.2.** $y=\dfrac{1}{2}$; **4.3.** $y=0, \quad x=-\dfrac{3}{4}$;

4.4. $y=x, \quad x=3$; **4.5.** $y=x, \quad x=0$; **4.6.** $y=3x$; **4.7.** $y=x, \quad y=-x$;

4.8. $y=0$.

6.1. ბ. **6.2.** ბ.

7.1. $\dfrac{x^5}{5}-2x^3+9x+c$; **7.2.** $\dfrac{5x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+c$; **7.3.** $x-3x^2+\dfrac{11}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^4+c$;

7.4. $x-\dfrac{1}{x}-2\ln|x|+c$; **7.5.** $a\ln|x|-\dfrac{a^2}{x}-\dfrac{a^3}{2x^2}+c$ **7.6.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c$;

7.7. $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x|+c$; **7.8.** $x-arctgx+c$; **7.9.** $x-2\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+c$;

7.10. $\dfrac{4^x}{\ln 4}+\dfrac{2\cdot 6^x}{\ln 6}+\dfrac{9^x}{\ln 9}+c$; **7.11.** 3; **7.12.** $\dfrac{2}{\ln 3}$; **7.13.** $\dfrac{1}{6}$; **7.14.** 1;

7.15. 1; **7.16.** 12; **7.17.** $\dfrac{\pi}{3}$; **7.18.** $\dfrac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$.

8.1. $\sin x-x\cos x$; **8.2.** $\cos x+x\sin x$; **8.3.** $x\ln x-x$; **8.4.** $(x^2-2x+2)e^x$;

8.5. $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2$; **8.6.** $-x^2\cos x+2\cos x+2x\sin x$; **8.7.** $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{n+1}\right)$, $n\neq -1$;

8.8. $-\dfrac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)$; **8.9.** $\dfrac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x-\dfrac{4}{3}\ln x+\dfrac{8}{9}\right)$; **8.10.** $-(x+1)e^{-x}$;

8.11. $-\dfrac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$; **8.12.** $xchx-shx$; **8.13.** $\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x}{9}\right)\operatorname{sh}3x-\left(\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x$;

8.14. $xarctgx-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$; **8.15.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; **8.16.** $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+x^2}{2}arctgx$;

8.17. $-\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^3}{3}\arccos x$; **8.18.** $-\dfrac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$;

8.19. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$; **8.20.** $x-\dfrac{1-x^2}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; **8.21.** $-\sqrt{x}+(1+x)arctg\sqrt{x}$;

8.22. $\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|-\cos x\cdot\ln|tgx|$; **8.23.** $\dfrac{1}{3}\left(x^3-1\right)e^{x^3}$; **8.24.** $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$;

8.25. $\dfrac{1+x^2}{2}(arctgx)^2-xarctgx+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$; **8.26.** $-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}\ln\left|1-x^2\right|+\dfrac{x^3}{3}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$;

8.27. $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$; **8.28.** $-\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}arctgx$;

8.29. $\dfrac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\dfrac{1}{2a^3}arctg\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$; **8.30.** $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}ar\sin\dfrac{x}{|a|}$ $(a\neq 0)$;

8.31. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$; **8.32.** $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$;

8.33. $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}$; **8.34.** $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$; **8.35.** $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}$;

8.36. $-\frac{(1-x)e^{arctgx}}{2\sqrt{1+x^2}}$; **8.37.** $\frac{(1+x)e^{arctgx}}{2\sqrt{1+x^2}}$; **8.38.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$;

8.39. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$; **8.40.** $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$;

8.41. $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$; **8.42.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$;

8.43. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}$; **8.44.** $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}arctg(e^x)$;

8.45. $-x-ctgx\cdot\ln(e^x\sin x)$; **8.46.** $xtgx+\ln|\cos x|$; **8.47.** $\frac{e^x}{x+1}$;

8.48. π; **8.49.** 0; **8.50.** 0; **8.51.** $\frac{1}{4}e^2$.

9.1. $\frac{2}{15}(5x+1)^{3/2}+c$; **9.2.** $\ln(x-10)+c$; **9.3.** $\ln(x^4+1)+c$; **9.4.** $\ln(e^x+3)+c$;

9.5. $\frac{\ln^3 x}{3}+c$; **9.6.** $\frac{e^{5x}}{5}+c$; **9.7.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+2}+c$; **9.8.** $-\frac{1}{x+1}+c$; **9.9.** $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c$;

9.10. $\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3}+c$; **9.11.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$; **9.12.** $\ln(e^x+1)+c$; **9.13.** $-\ln|\cos x|+c$;

9.14. $\ln(\sin x)+c$; **9.15.** $\ln\frac{5}{3}$; **9.16.** $\ln\sqrt{5}$; **9.17.** $\frac{2^{13}-1}{26}$; **9.18.** $-\sqrt{3}$;

9.19. $\ln\frac{3}{5}$.

10.1. $\frac{1}{\sqrt{ab}}arctg(x\sqrt{b/a})+c$, Tu $ab>0$; $\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|+c$, Tu $ab<0$;

10.2. $-\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+c$; **10.3.** $\ln|x-2|+\ln|x+5|+c$;

10.4. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+c$; **10.5.** $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+c$.

11.1. $4\sqrt{2}$; **11.2.** $\frac{a^3\pi}{4}$; **11.3.** $\frac{\sqrt{(1+e^2)^3}-\sqrt{8}}{3}$; **11.4.** $\sqrt{5}$; **11.5.** $10\pi^2$;

11.6. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

12.1. $\frac{4}{3}$;   12.2. $\ln 2$;   12.3. $-2\sin 2$;   12.4. 4π;   12.5. $-\frac{40}{3}$;   12.6. 3;

12.7. 16;   12.8. $-\frac{14}{15}$.

13.1 ა) $2\pi R^2$;

ამოხსნა: თუ გამოვიყენებთ წრეწირის

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

პარამეტრული სახით განტოლებას, მივიღებთ

$$\oint_L xdy - ydx = \int_0^{2\pi} (R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t))dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t)dt = R^2(2\pi - 0) = 2\pi R^2.$$

13.1. ბ) $-2\pi R^2$;   13.2. ა) 8π;

ამოხსნა: შემოვიღოთ $P(x,y) = -x^2 y$, $Q(x,y) = xy^2$ აღნიშვნები. ცხადია,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

$$\oint_L xy^2 dy - yx^2 dx = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy^{*)}.$$

პოლარულ კოორდინატებზე $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi \in [0, 2\pi]$, გადასვლის შემდეგ მივიღებთ

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \iint_D r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = 8\pi.$$

13.2. ბ) -8π;   13.3. ა) $-\frac{4}{3}$;

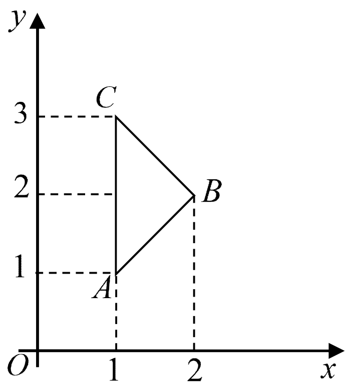
ამოხსნა: ჩვენ შემთხვევაში $P(x,y) = 2(x^2 + y^2)$, $Q(x,y) = (x+y)^2$, ამიტომ

---

*) **თეორემა:** თუ D არე შემოსაზღვრულია L შეკრული წირით (კონტურით), ხოლო $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ უწყვეტი ფუნქციებია D არის ჩაკეტვაზე და გააჩნიათ $\frac{\partial Q}{\partial x}$ და $\frac{\partial P}{\partial y}$ უწყვეტი კერძო წარმობულები, მაშინ

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

ამ უკანასკნელს გრინის ფორმულა ეწოდება.



ნახ. 13.3ა

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=\iint_D 2(x-y)dxdy,$$

სადაც D არე წარმოადგენს ABC სამკუთხედს (იხ. ნახ 13.3ა). ცხადია, AB წრფის განტოლებაა: $y=x$, ხოლო BC წრფის – $y=4-x$, $x\in[1,2]$. D არეზე ორმაგი ინტეგრალის გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\iint_D 2(x-y)dxdy=2\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x-y)dy=-\frac{4}{3}.$$

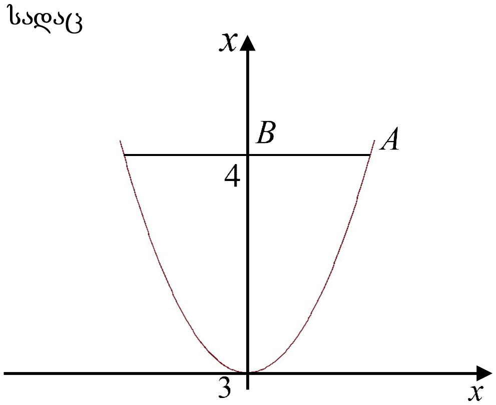
13.3. ბ) $\frac{4}{3}$;

13.4. -16;

ამოხსნა: ავაგოთ L წირი (იხ. ნახ. 13.4), ინტეგრების მიმართულებად ავიღოთ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება. ინტეგრალი L წირის გასწვრივ, შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც შემდეგი სამი ინტეგრალის ჯამი

$$\oint_L 2(y+2x)dx+2(x+y)dy=\int_{OA}(y+2x)dx+2(x+y)dy+\int_{AB}(y+2x)dx+2(x+y)dy+\int_{BO}(y+2x)dx+2(x+y)dy=\frac{8}{3},$$

სადაც



ნახ. 13.4

$$\int_{OA}(y+2x)dx+2(x+y)dy=\begin{vmatrix} y=4x^2 \\ dy=8xdx \end{vmatrix}$$

$$=\int_0^1(4x^2+2x)dx+2(x+4x^2)8xdx=\frac{71}{3},$$

$$\int_{AB}(y+2x)dx+2(x+y)dy=\begin{vmatrix} y=4 \\ dy=0 \end{vmatrix}=\int_1^0(4+2x)dx=-5,$$

$$\int_{BO}(y+2x)dx+2(x+y)dy=\begin{vmatrix} x=0 \\ dx=0 \end{vmatrix}=\int_4^0 2ydy=-16.$$

13.5. $\frac{32}{3}$. **15.1.** $y=Cx$; **15.2.** $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$; **15.3.** $y=\pm\sqrt{x^2+C}$;

15.4. $y=Ce^{\frac{x(x+2)}{2}}$; **15.5.** $y=Ce^{\frac{x(5x+4)}{2}}$; **15.6.** $y=Ce^{-\cos x}$; **15.7.** $y=\frac{-x+C}{x-1}$;

15.8. $y=\pm\frac{\sqrt{C-x^2}}{x}$; **15.9.** $y^2=-x^2+\ln x^2+C$; **15.10.** $y=C\sin x$;

15.11. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+C=0$; **15.12.** $y^2=C(x^2-1)-1$; **15.14.** $\frac{y^3}{3}=x-x^2+C$;

15.14. $y=\frac{x^2}{2}-\ln x+C, \quad x=0$; **15.15.** $10^x+10^y=C$; **15.16.** $y=\sin(x+C)$;

15.17. $y=\dfrac{2}{Cx+1}$; **15.18.** $y=tg(arctgx+C)$.

16.1. $y=x^3-x^2+x+1$; **16.2.** $y=4x$; **16.3.** $y=2e^{x+2}$;

16.4. $y=\dfrac{5}{4}x^4+\sin x+4$; **16.5.** $y=x^3-\cos x+4$; **16.6.** $y=\dfrac{1}{3}x^6+e^x+1$;

16.7. $y=-5\cos x+9\sin x-4$; **16.8.** $y=3e^x+\dfrac{1}{8}x^8+2x+4$.

17.1. $y=2x-1+Ce^{-2x}$; **17.2.** $y=e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{2}x^2+C\right)$; **17.3.** $y=(x^2+1)(x+C)$;

17.4. $y=\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x+Ce^{-x}$; **17.5.** $x=y^3\left(-\dfrac{1}{2}\ln y+C\right)$;

17.6. $x=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}+Ce^{2y}$; **17.7.** $y=Cx+x^2$; **17.8.** $y=\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{C}{x^2}$;

17.9. $x\sqrt{1+y^2}+\cos y=C$ (მითითება: განტოლება წრფივია x და $\dfrac{dx}{dy}$-ის მიმართ);

17.10. $x=Cy^2-\dfrac{1}{y}$; **17.11.** $y\left(x^2+Cx\right)=1$; **17.12.** $y^2=x\ln\dfrac{C}{x}$;

17.13. $x^2=\dfrac{1}{y+Cy^2}$; **17.14.** $x=y^3(3+Ce^{\cos y})$; **17.15.** $x=t\left(\dfrac{1}{2}t^2+C\right)$.

18.1. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$; **18.2.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}$; **18.3.** $y=C_1e^{-6x}+C_2e^{5x}$;

18.4. $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{5x}$; **18.5.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$; **18.6.** $y=C_1+C_2e^{4x}$;

18.7. $y=C_1e^{-3x}\sin(2x)+C_2e^{-3x}\cos(2x)$; **18.8.** $y=C_1e^x+C_2xe^x$;

18.9. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}$; **18.10.** $y=C_1e^{-2x}\sin(5x)+C_2e^{-2x}\cos(5x)$.

19.1. $x^2+2xy+2y^2=C, \quad C>0$; **19.2.** $\left|1+\sqrt{2}\dfrac{y}{x}\right|=Cx, \quad C>0$;

19.4. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1}=Cy$; **19.5.** $y=-x\ln\ln\dfrac{C}{x}$; **19.6.** $y=x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$;

19.7. $y=\dfrac{C}{x}-\dfrac{x}{2}$; **19.8.** $y=Ce^{\frac{x}{y}}$; **19.9.** $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$;

18.10. $3x+y+2\ln|x+y-1|=C$; **18.11.** $\ln|4x+8y+5|+8y-4x=C$.

20.1. $4yx-x^4+y^4=C$; **20.2.** $y=x\cos y+y\sin x=C$; **20.3.** $x^3+3x^2y^2+y^4=C$;

20.4. $ye^x\left(x^2+\dfrac{y^2}{3}\right)=C$; **20.5.** $\dfrac{x^2}{2}+xy+y^2=C$; **20.6.** $\dfrac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$;

20.7. $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+2x+\dfrac{y^3}{3}=C$; **20.8.** $x^2+y^2-2arctg\dfrac{y}{x}=C$; **20.9.** $x^2-y^2=Cy^3$;

20.10. $\dfrac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2$.

21.1. $y^2 = x^4\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2$, $\quad y = 0$; **21.2.** $y = \frac{x}{x + C}$; **21.3.** $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x} - x}$, $\quad y = 0$;

21.4. $y = x^2(x^2 + C)^2$; **21.5.** $y = -\frac{2x}{1 + Ce^{\frac{2x^5}{5}}}$; **21.6.** $y = x - \frac{2x}{1 + Ce^{\frac{2x^5}{5}}}$.