ლექცია 1
თავი 1

ვექტორული და ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

სითხის მოძრაობის შესწავლისას, როგორც ითქვა, სითხეს განიხილავენ როგორც უწყვეტ გარემოს. ამიტომ აინტერესებთ არა სასრული რაოდენობის ნაწილაკთა მოძრაობა, არამედ სხვადასხვა ფიზიკურ სიდიდეთა ველები.

თუ სივრცის, ან სივრცის ნაწილის ყოველ წერტილში განსაზღვრულია რაიმე ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობა, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია ამ სიდიდის ველი. ზოგად შემთხვევაში ეს ველი სამგანზომილებიანია (სივრცითია). კერძო შემთხვევაში კი ამოცანა შეიძლება გამარტივდეს და შესწავლილ იქნეს ერთგანზომილებიანი ან ორგანზომილებიანი (ბრტყელი) ველები. მათემატიკურად ეს ველები აღიწერება კოორდინატებისა და ფუნქციების საშუალებით.

თუ ფიზიკური სიდიდე დროზე არ არის დამოკიდებული ველს სტაციონარული ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი-არასტაციონარული.

ჰიდრომექანიკაში სამი ტიპის ველი გვხვდება. სკალარული, ვექტორული და ტენზორული.

§1. სკალარული და ვექტორული ველები. მათი თვისებები

1. სკალარული ველი.

ველს ეწოდება სკალარული, თუ განსახილველი სიდიდე სკალარულია, ე.ი. თუ იგი ხასიათდება მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობით. სკალარული ველის მაგალითებია სიმკვრივის, ტემპერატურის და ა.შ., ველები.

თუ სივრცეში მოცემულია რაიმე M წერტილი, მაშინ სტაციონარული ფუნქციის საშუალებით:

$$u = u(M),$$

ხოლო თუ სივრცეში შემოღებულია დეკარტის x, y, z კოორდინატთა სისტემა,მაშინ

$$u = f(x, y, z). \tag{1.1}$$

სკალარული ველის გეომეტრიული მახასიათებელია იზოზედაპირები. ეს ისეთი ზედაპირებია, რომლის ყოველ წერტილში სკალარული ფუნქცია ერთსა და იმავე მნიშვნელობას იღებს. მოცემული ველის იზოზედაპირები განისაზღვრება განტოლებით

$$f(x, y, z) = const \tag{1.2}$$

სკალარულ ველს ეწოდება ბრტყელი, თუ არსებობს ისეთი სიბრტყე, რომ ამ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში მითითებული სკალარული ველი ერთი და იგივე იყოს.

თუ ამ სიბრტყედ xoy სიბრტყეს მივიჩნევთ, მაშინ სკალარული ველი განისაზღვრება სკალარული ფუნქციით

$$u = f(x, y), \tag{1.3}$$

ე.ი. იგი არ იქნება დამოკიდებული z კოორდინატზე.

ბრტყელ სკალარული ველის გეომეტრიული მახასიათებელია იზოწირები, ისეთი წირები, რომლებზედაც სკალარული ფუნქცია მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს.

ზოგჯერ დეკარტის კოორდინატების ჩვეულებრივი x, y, z აღნიშვნის ნაცვლად, ხელსაყრელია, შემოვიღოთ აღნიშვნა x_1, x_2, x_3. ეს შესაძლებლობას მოგვცემს შემოვიტანოთ ინდექსური აღნიშვნები რომლებიც გაამარტივებენ გარდაქმნებს.

სკალარული ფუნქციის ძირითადი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა არ იცვლება კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნისას. თუ გადავალთ x_1, x_2, x_3 ძველი კოორდინატებიდან x'_1, x_2', x'_3 ახალ კოორდინატებზე, მაშინ $u(x_1, x_2, x_3)$ სკალარული ფუნქციის მნიშვნელობა არ შეიცვლება

$$u(x_1', x_2', x_3') = u(x_1, x_2, x_3). \tag{1.4}$$

2. <u>ვექტორული ველი</u>

ველს ეწოდება ვექტორული, თუ სივრცის ყოველ წერტილში მოცემულია ვექტორული სიდიდე $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

თუ სივრცეში შემოღებულია დეკარტის კოორდინატთა სისტემა, მაშინ $\vec{a} = \vec{a}(m)$ ვექტორული ველის მოცემა ნიშნავს, რომ მოცემულია წერტილის სამი სკალარული ფუნქცქცია $P(m), Q(m), R(m)$

$$\vec{a}(m) = \vec{i}\,P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z), \tag{1.5}$$

სადაც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ კოორდინატთა სისტემის ორტებია. (1.5) ასეც შეიძლება გადავწეროთ

$$\vec{a}(m) = \vec{i}\,a_x\,(x, y, z) + \vec{j}a_y\,(x, y, z) + \vec{k}a_z(x, y, z). \tag{1.6}$$

თუ გამოვიყენებთ ინდექსურ ჩაწერას, მაშინ (1.6) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{a} \Leftrightarrow a_i, \quad i = 1,2,3 \tag{1.7}$$

ასეთი ჩაწერის დროს იგულისხმება , რომ a_i არის $\vec{a}$ ვექტორის $i-$ური კომპონენტი.

ვექტორული ველის გეომეტრიულ მახასიათებელს ვექტორული წირი წარმოადგენს. ეს არის წირი, რომელის ყოველ m წერტილში $\vec{a}$ ვექტორს ამ წირის მხების მიმართულება აქვს.

ვთქვათ, ვექტორული ველი მოიცემა (1.6) ფორმულით, სადაც a_x, a_y, a_z სიდიდეები თავიანთი ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია და გააჩნიათ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. მაშინ ვექტორული წირის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე:

$$[d\vec{r} * \vec{a}] = 0, \tag{1.8}$$

ანუ კოორდინატებში

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \tag{1.9}$$

აქ $d\vec{z}(dx, dy, dz)$ - წირის მხების ელემენტია.

3. <u>ვექტორული ველის ნაკადი.</u> ვექტორული ველის ინტეგრალურ მახასიათებელს ამ ველის ნაკადი წარმოადგენს.

ვთქვათ, მოცემულია უწყვეტი ვექტორული ველი

$$\vec{a}(m) = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z.$$

ვთქვათ, S-რაიმე გლუვი ან უბან-უბან გლუვი ორიენტირებული ზედაპირია. $\vec{a}(m)$ ვექტორული ველის π ნაკადი ორიენტირებულ S ზედაპირში ეწოდება პირველი გვარის ზედაპირულ ინტეგრალს, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\pi = \oiint_S geg_n \vec{a} ds = \oiint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds , \tag{(1)11)}$$

სადაც $\vec{n}$ გარე ნორმალია, ds კი-S ზედაპირის ფართის ელემენტი.

თუ α, β, γ წარმოადგენენ კუთხეებს, რომლებსაც ადგენს S ზედაპირის $\vec{n}$ ნორმალი კოორდინატთა ღერძებთან, მაშინ ნაკადი შეიძლება გამოვსახოთ მეორე გვარის ზედაპიული ინტეგრალით:

$$\pi = \oiint_s (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds = \oiint_s (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) ds,$$

ანუ

$$\pi = \oiint_s a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy , \tag{1.12}$$

სადაც

$$\cos\alpha ds = dydz, \cos\beta ds = dxdz, \cos\gamma ds = dxdy .$$

თუ სივრცის რაიმე G არეში $\vec{a}$ ვექტორის კომპონენტები a_x, a_y, a_z უწყვეტნი არიან და აქვთ უწყვეტი წარმოებულები $\frac{\partial a_s}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}$, მაშინ ძალაშია გაუსის ფორმულა:

$$\pi = \oiint_s (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds = \int_\tau \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) d\tau , \tag{1.13}$$

სადაც τ არის S ზედაპირის შემოსაზღვრული მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია G არეში.

სკალარულ და ვექტორულ ველებში განიხილავენ **პირველი რიგის-სამ დიფერენციალურ** ოპერატორს. სკალარული ველის გრადიენტს, ვექტორული ველის დივერგენციასა და როტორს.

4. სკალარული ველის გრადიენტი

ვთქვათ, მოცემულია $u = f(x, y, z)$ სკალარული ფუნქციით განსაზღვული სტაციონარული სკალარული ველი, სადაც f ფუნქცია დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

u სკალარული ველის გრადიენტი მოცემულ M წერტილში ეწოდება ვექტორს, რომლიც განისაზღვრება ტოლობით

$$gradu = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} . \tag{1.14}$$

თუ გავიხსენებთ მიმართულებით წარმოებულის განმარტებას, გვექნება

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(gradu, \vec{l}_0 \right), \tag{1.15}$$

სადაც l_0 ერთეულოვანი ვექტორია $\vec{l}$ ვექტორის მიმართულებით, ე.ი.

$$\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{\left| \vec{l} \right|} = \vec{i} \cos\alpha + \vec{j} \cos\beta + \vec{k} \cos\gamma . \tag{1.16}$$

გრადიენტი იზოზედაპირის ნორმალის გასწვრივაა მიმართული. იგი მიმართულია ველის ფუნქციის ზრდის მიმართულებით და გრადიენტის მოდული ტოლია მიმართულებით წარმოებულის მაქსიმალური მნიშვნელობისა

$$\max\frac{\partial u}{\partial l}=|gradu|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\ . \tag{1.17}$$

გრადიენტის ეს თვისებები გრადიენტის ინვარიანტულ მახასიათებლებს წარმოადგენს. ისინი გვიჩვენებენ, რომ $gradu$ არის ვექტორი, რომელიც მოცემულ წერტილში სკალარული ველის მაქსიმალური ცვლილების მიმართულებასა და სიდიდეს გვაძლევს.

5. ვექტორული ველის დივერგენცია

ვექტორის ნაკადის ცნება ჩაკეტილ ზედაპირში საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ ვექტორული ველის დივერგენციის ცნება. ველის დივერგენცია წარმოადგენს ველის რაოდენობრივ მახასიათებელს მოცემულ წერტილში.

ვთქვათ, M არის ველის შესასწავლი წერტილი. შემოვსაზღვროთ იგი ნებისმიერი ფორმის S ზედაპირით. ამ ზედაპირით შემოსაზღვრული არე იყოს (τ), მისი მოცულობა კი τ . განვიხილოთ ფარდობა

$$\frac{\oiint(\vec{a}\cdot\vec{n})ds}{\tau}\,. \tag{1.18}$$

თუ ამ ფარდობას აქვს სასრული ზღვარი, სადაც (τ) არე იყუსება M წერტილში, მაშინ ამ ზღვარს $\vec{a}$ ვექტორული ველის დივერგენცია ეწოდება და იგი ასე ჩაიწერება

$$div\vec{a}=\lim_{(\tau)\to M}\frac{\oiint(\vec{a}\cdot\vec{n})ds}{\tau}\,. \tag{1.19}$$

ეს განმარტება დივერგენციის ინვარიანტულ განმარტებას წარმოადგენს. ეს ნიშნავს, რომ $\vec{a}$ ველის დივერგენცია M წერტილში არის $\vec{a}$ ვექტორის ნაკადის მოცულობითი სიმკვრივე მოცემულ წერტილში.

$\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის წერტილები, რომლებიც $div\vec{a}>0$ წყაროებად იწოდებიან, ხოლო წერტილები, სადაც $div\vec{a}<0$ - ჩასადენებად.

ვექტორული ველის დივერგენცია ველის წერტილთა სკალარულ ფუნქციას წარმოადგენს .

თუ $\vec{a}(M)$ ვექტორის $a_x(x,y,z), a_y(x,y,z), a_z(x,y,z)$ კომპონენტებს აქვთ უწყვეტი წარმოებულები $\frac{\partial a_x}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial y},\frac{\partial a_z}{\partial z}$ M წერტილის მახლობლობაში, მაშინ დივერგენციის ინვარიანტული განმარტებიდან და გაუსის ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$div\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\,. \tag{1.20}$$

ეს ფორმულა საშულებას გვაძლევს, გაუსის ფორმულა ჩავწეროთ ვექტორული სახით

$$\oiint_S(\vec{a}\cdot\vec{n})ds=\int_\tau div\vec{a}\,d\tau \tag{1.21}$$

6. სალენოიდური ვექტორული ველი.

თუ რაიმე G არის ყოველ M წერტილში $\vec{a}$ ვექტორული ველის დივერგენცია ნულის ტოლია

$$div\vec{a} = 0 . \tag{1.22}$$

მაშინ ამბობენ, რომ ველი სოლენოიდურია ამ არეში.

გაუსის ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ სოლენოიდურ ველში ვექტორული ველის ნაკადი ნებისმიერ ჩაკეტილ ზედაპირში ნულის ტოლია

$$\oiint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds = 0 \tag{1.23}$$

სოლენოიდურ ველში ვექტორული წირები არც იწყება და არც მთავრდება. ისინი ან ჩაკეტილი წირებია, ან მთავრდებიან ველის საზღვარზე.

7. ვექტორული ველის ცირკულაცია.

ვექტორული ველის მეორე ინტეგრალური მახასიათებელი ამ ველის ცირკულაციაა.

$\vec{a} = \vec{a}(M)$ ვექტორული ველის Γ ცირკულაცია ეწოდება წირით ინტეგრალს, აღებულს ჩაკეტილი ორიენტირებული l წირის გასწვრივ

$$\Gamma = \oint_l (\vec{a} \cdot d\vec{r}). \tag{1.24}$$

თუ $\vec{a} = \vec{a}(M)$ ვექტორული ველი მოცემულია კომპონენტებში

$$\vec{a} = \vec{i}\, a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z ,$$

მაშინ ვექტორული ველის ცირკულაცია ასე გამოისახება:

$$\Gamma = \oint_l a_x dx + a_y dy + a_z dz . \tag{1.25}$$

ჩაკეტილ l კონტურის შემოვლის დადებით მიმართულებად აღებულია ისეთი მიმართულება, როდესაც ამ წირით შემოსაზღვრული არე მარცხნივ რჩება.

8. ვექტორული ველის როტორი.

ვთქვათ, მოცემულია ვექტორული ველი $\vec{a}(M) = \vec{i}\, a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z$.

დავუშვათ, რომ $\vec{a}(M)$ ვექტორის a_x, a_y, a_z კომპონენტები უწყვეტია და აქვს ყველა არგუმენტით პირველი რიგის კერძო წარმოებული.

$\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის როტორი ეწოდება ვექტორს, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$rot\vec{a} = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \tag{1.26}$$

ანდა სიმბოლური სახით

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \tag{1.27}$$

თუ რაიმე G არეში $rot\vec{a} = 0$, მაშინ $\vec{a}$ ვექტორის ველს ამ არეში უგრიგალო ანუ პოტენციური ველი ეწოდება.

9. სტოქსის თეორემა.

ვთქვათ, $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის a_x, a_y, a_z კომპონენტები უწყვეტია და აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ $\vec{a}$ ვექტორის ცირკულაცია l ჩაკეტილ კონტურზე ტოლია მოცემული ვექტორის როტორის ნაკადისა ამ კონტურზე მოჭიმულ ნებისმიერ S ზედაპირში.

$$\oint_l (\vec{a} \cdot d\vec{z}) = \int_s (rot\vec{a} \cdot \vec{n}) ds \tag{1.28}$$

იგულისხმება, რომ $\vec{n}$ ნორმალის ორიენტაცია S ზედაპირზე შეთანხმებულია l კონტურის ორიენტაციასთან ისე, რომ ნორმალის ბოლოდან კონტურის შემოვლა არჩეული მიმართულებით ჩანდეს, როგორც მოძრაობა საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

10. პოტენციალური ველი.

სივრცის მოცემულ τ არეში $\vec{a}(M)$ ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციალური თუ არსებობს ისეთი სკალარული $\varphi(M)$ ფუნქცია, რომ τ არის ყოველ წერტილში სრულდება ტოლობა

$$\vec{a}(M) = grad\varphi . \tag{1.29}$$

$\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ ფუნქციას, რომელიც τ არეში აკმაყოფილებს (1.29) ტოლობას, $\vec{a}$ ვექტორული ველის პოტენციალი ეწოდება. (1.29) თანაფარდობა ტოლფასია შემდეგი სამი სკალარული ტოლობისა:

$$a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} . \tag{1.30}$$

ველის პოტენციალი არაცალსახად განისაზღვრება მუდმივი შესაკრების სიზუსტით.

იმისათვის, რომ $\vec{a}$ ვექტორული ველი, რომელიც მოცემულია τ ცალდბმულ არეში იყოს პოტენციალური აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ არის ყოველ წერტილში სრულდებოდეს პირობა

$$rot\vec{a} = 0 , \tag{1.31}$$

ე.ი. ვექტორული ველი უნდა იყოს უგრიგალო.

$\vec{a}(M) = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$ ვექტორული ველის $\varphi(x, y, z)$ პოტენციალი განისაზღვრება ფორმულით

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x dx + a_y dy + a_z dz , \tag{1.32}$$

სადაც (x_0, y_0, z_0) ველის ფიქსირბული წერტილია, (x, y, z) კი-ნებისმიერი მიმდინარე წერტილი.

$\vec{a}$ პოტენციალურ ვექტორულ ველში წირითი ინტეგრალი ტოლია ინტეგრების არის ბოლო და საწყის წერტილებში φ პოტენციალის მნიშვნელობათა სხვაობისა

$$\int_{M_1}^{M_2} (\vec{a} \cdot d\vec{z}) = \varphi(M_2) - \varphi(M_1). \tag{1.33}$$

11. ჰამილტონის ოპერატორი ”ნაბლა”.

ვექტორული ანალიზის ბევრი ოპერაცია შეიძლება ჩაიწეროს შემოკლებულად, თუ გამოვიყენებთ ჰამილტონის სიმბოლურ ოპერატორ ”ნაბლას”

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\ . \tag{1.34}$$

ამ ოპერატორში გაერთიანებულია დიფერენციალური და ვექტორული თვისებები. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ფორმალური ნამრავლი $\frac{\partial}{\partial x}$ ფუნქციაზე $f(x, y, z)$ წარმოადგენს კერძო წარმოებულს $\frac{\partial f}{\partial x.}$.

ვექტორული ალგებრის გამოყენებისას ”ნაბლა” ოპერატორზე ფორმალური მოქმედებები ისე ტარდება, თითქოს იგი ვექტორი იყოს. მაგალითად,

1. თუ $u = u(x, y, z)$ სკალარული დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ ვექტორის სკალარზე გამრავლება მოგვცემს:

$$\nabla u = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}\,. \tag{1.35}$$

2. თუ $\vec{a} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$,სადაც a_x, a_y, a_z დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მაშინ სკალარული ნამრავლის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\left(\nabla \cdot \vec{a}\right) = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z\right) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\,. \tag{1.36}$$

3. თუ $\vec{a} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$, მაშინ

$$\left[\nabla \cdot \vec{a}\right] = rot\vec{a}\ . \tag{1.37}$$

4. $\left(\nabla\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right) = \nabla\vec{a} + \nabla\vec{b}$, ე.ი.

$$div\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = div\vec{a} + div\vec{b}\ . \tag{1.38}$$

5. $\left[\nabla\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right] = \left[\nabla\vec{a}\right] + \left[\nabla\vec{b}\right]$,ე.ი.

$$rot\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = rot\vec{a} + rot\vec{b}\,. \tag{1.39}$$

”ნაბლა” ოპერატორს გარდა ვექტორული ბუნებისა, გააჩნია დიფერენციალური ბუნება. თუ გავითვალისწინებთ ∇ -ს დიფერენციალურ ხასიათს, ვიგულისხმებთ, რომ ∇ ოპერატორი მოქმედებს ყველა იმ სიდიდეზე, რომელიც მის შემდგომ წერია. ამიტომ

$$\left(\nabla\vec{a}\right) \neq \left(\vec{a}\nabla\right).$$

მართლაც

$$\left(\nabla\vec{a}\right) = div\vec{a}\ ,$$

ხოლო

$$\left(\vec{a}\nabla\right) = a_x\,\frac{\partial}{\partial x} + a_y\,\frac{\partial}{\partial y} + a_z\,\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{1.40}$$

არის სკალრული დიფერენციალური ოპერატორი.

ნამრავლზე ”ნაბლა” ოპერატორის გამოყენებისას უნდა ვიმოქმედოთ ისე, როგორც ნამრავლის წარმოებულზე.

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ∇ ოპერატორი უნდა გამოვიყენოთ ყოველ მამრავლზე, ისე რომ დანარჩენი მამრავლები უცვლელად დავტოვოთ, ხოლო შემდეგ ავიღოთ ჯამი მიღებული გამოსახულებიდან. ამავე დროს უნდა ვიხემძღვანელოთ შემდეგი წესით:

ა) თუ ოპერატორი მოქმედებს ნამრავლზე, პირველ რიგში ვითვალისწინებთ მის დიფერენციალურ ხასიათს, შემდეგ კი- ვექტორულს.

ბ) რომ აღვნიშნოთ თუ რომელ სიდიდეზე მოქმედებს ∇ ოპერატორი, ამ ოპერატორს მივუწეროთ ინდექსად ეს სიდიდე.

”ნაბლა” ოპერატორის მოქმედების შედეგად მიგებული ფორმულებია:

1. $\left(\nabla \varphi \vec{a}\right) = \left(\nabla_{\varphi} \varphi \vec{a}\right) + \left(\nabla_a \varphi \vec{a}\right) = \vec{a}\left(\nabla \varphi\right) + \varphi\left(\nabla \vec{a}\right)$,

ე.ი. $div \varphi \vec{a} = \vec{a} grad \varphi + \varphi div \vec{a}$. (1.41)

2. $\nabla \varphi \psi = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi, grad \varphi \psi = \varphi grad \psi + \psi grad \varphi$. (1.42)

3. $rot \varphi \vec{a} = \left[\nabla_{\varphi} \varphi \vec{a}\right] + \left[\nabla_a \varphi \vec{a}\right] = \left[\nabla \varphi \vec{a}\right] + \varphi rot \vec{a}$. (1.43)

4. $div\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \left(\nabla\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right) = \left(\nabla_a\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right) + \left(\nabla_b\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right)$,

ორივე შესაკრებში მოვახდინოთ ციკლური გადაადგილებანი, რადგან ∇ გამრავლებისას ისე იქცევა, როგორც ვექტორი. მეორე შესაკრებში კი, გარდა ამისა, $\vec{b}$ ვექტორი დავსვათ ∇_b შემდეგ. ამისათვის კი ვექტორული ნამრავლის ნიშანი უნდა შევცვალოთ

$$div\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \left(\vec{b}\left[\nabla_a \vec{a}\right]\right) - \left(a\left[\nabla_b \vec{b}\right]\right) = \vec{b} rot \vec{a} - \vec{a} rot \vec{b} . \quad (1.44)$$

5.ვექტორული ალგებრიდან ცნობილია, რომ

$$\left[\vec{a}\left[\vec{b} \cdot \vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right). \quad (1.45)$$

გამოვიყენოთ ეს ტოლობა შემდეგი სიდიდის გამოსათვლელად:

6. $rot\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \left[\nabla\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right] = \left[\nabla_a\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right] - \left[\nabla_b\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right] = \left(\nabla_a \vec{b}\right)\vec{a} - \left(\nabla_a \vec{a}\right)\vec{b} + \left[\nabla_b \vec{b}\right]\vec{a} - \left(\vec{a}\nabla_b\right)\vec{b} =$
$\left(\vec{b}\nabla\right)\vec{a} - \vec{b} div \vec{a} + \vec{a} div \vec{b} - \left(\vec{a}\nabla\right)\vec{b}$

(1.46)

აქ მიღებული სიმბოლოები $\left(\vec{a}\nabla\right)$ და $\left(\vec{b}\nabla\right)$ გამოისახება (1.40) ფორმულით.

7. $\nabla\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \nabla_a\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \nabla_b\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

გამოვიყენოთ იგივე გარდაქმნა, რაც წინა მაგალითში, გვექნება

$$grad\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{b}\nabla_a\right)\vec{a} + \left[\vec{b}\left[\nabla_a \vec{a}\right]\right] + \left(\vec{a}\nabla_b\right)\vec{b} + \left[\vec{a}\left[\nabla_b \vec{b}\right]\right] = \left(\vec{b}\nabla\right)\vec{a} + \left[\vec{b} rot \vec{a}\right] + \left(\vec{a}\nabla\right)\vec{b} + \left[\vec{a} rot \vec{b}\right].$$

(1.47)

თუ გამოვიყენებთ ”ნაბლა” ოპერატორის ორჯერ მოქმედებას მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

8. $rot grad \varphi = \left[\nabla \nabla \varphi\right] = \left[\nabla \nabla\right]\varphi = 0$. (1.48)

9. $div rot \vec{a} = \left(\nabla\left[\nabla \nabla \vec{a}\right]\right) = \left(\left[\nabla \nabla\right]\vec{a}\right) = 0$. (1.49)

10. $div grad \varphi = \left(\nabla \nabla\right)\varphi = \nabla \varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$. (1.50)

აქ $\nabla^2 = \nabla$ -არის ლაპლასის ოპერატორი.

11. $rot rot \vec{a} = \left[\nabla\left[\nabla \vec{a}\right]\right] = \nabla\left(\nabla \vec{a}\right) - \left(\nabla \nabla\right)\vec{a} = grad div \vec{a} - \nabla \vec{a}$. (1.51)

ლექცია 2
თავი 2

სითხის კინემატიკა

§1. ეილერისა და ლაგრანჟის ცვლადები

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის შესწავლის დროს არსებობს ორი მიდგომა. თუ უწყვეტი გარემოს ნაწილაკს განვიხილავთ, როგორც მოძრავ მატერიალურ წერტილს, მაშინ მთელი სხეულის მოძრაობის დასახასიათებლად აუცილებელია შემოვიღოთ გარკვეული პარამეტრები, რომლებიც სხეულის ამა თუ იმ წერტილს დაახასიათებენ.

ვთქვათ, ასეთი პარამეტრები იყოს მატერიალური წერტილის ξ_i, $i=1,2,3$, კოორდინატები დროის რაღაც (ვთქვათ, საწყის) მომენტში. მაშინ სხეულის მოძრაობის განტოლებები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$x_i = x_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right), \quad i=1,2,3, \tag{2.1}$$

სადაც $x_i = x_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right)$, $i=1,2,3$, არის დროის t მომენტში იმ მატერიალური წერტილის კოორდინატები, რომლის კოორდინატებიც საწყის მომენტში იყო ξ_i, $i=1,2,3$. ცხადია, სიჩქარის და აჩქარების კომპონენტებს ექნებათ

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_i &= \dot{x}_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right) = \frac{\partial x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}, \quad i=1,2,3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

და

$$\begin{aligned} a_i &= \dot{\mathrm{v}}_i = \ddot{x}_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right) = \frac{\partial^2 x_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right)}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 u_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right)}{\partial t^2}, \quad i=1,2,3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

სახე. ასეთ მიდგომას ეწოდება *ლაგრანჟის მეთოდი*, ხოლო ξ_1, ξ_2, ξ_3 პარამეტრებს _ *ლაგრანჟის ცვლადები.* Gამრიგად, სხეულის მოძრაობის ლაგრანჟის ცვლადებში შესწავლა გულისხმობს მისი ცალკეული მატერიალური წერტილების მოძრაობის შესწავლას და აქედან გამომდინარე მთელი სხეულის (უწყვეტი გარემოს) მოძრაობის შესწავლას.

არსებობს მეორე მიდგომაც, როცა სხეულის მოძრაობის შესწავლა ხდება საკოორდინატო სისტემის სხვადასხვა წერტილში სხეულის ნაწილაკების მოძრაობის მახასიათებლების (სიჩქარე, აჩქარება, ძაბვები და სხვ.) დროის განმავლობაში ცვლილებების განხილვით. სხვა სიტყვებით, დამკვირვებელი სივრცის მოცემულ წერტილში შეისწავლის დროის სხვადასხვა მომენტში მყოფ, საზოგადოდ სხვადასხვა, ნაწილაკის მოძრაობის მახასიათებლებს და ამდენად, ახდენს რა დაკვირვებას უწყვეტი გარემოს მიერ დაკავებულ ყველა წერტილში, შეისწავლის მთელი უწყვეტი გარემოს მოძრაობას. ასეთ მიდგომას ეწოდება *ეილერის მეთოდი.* ეილერის მეთოდის გამოყენებისას დრო, სიჩქარე, აჩქარება, ძაბვები და სხვა სიდიდეები განიხილება, როგორც x_1, x_2, x_3, t ცვლადების, რომელთაც *ეილერის ცვლადები* ეწოდება, ფუნქციები. შევნიშნოთ, რომ სხეულის ცალკეული ნაწილაკების გადაადგილება შეიძლება შესწავლილ იქნეს მხოლოდ ლაგრანჟის ცვლადებში. ამ შემთხვევაში ეილერის ცვლადების გამოყენება შეუძლებელია და მათზე გადასვლა მხოლოდ ფორმალური ხასიათის მქონე ოპერაციაა,

რომელიც არ ცვლის მიდგომის თვალსაზრისს. თუ სიჩქარე $\vec{\mathrm{v}}(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1,2,3$, მოცემულია ეილერის ცვლადებში, მაშინ აჩქარების გამოსათვლელად იმავე წერტილში საჭიროა გადავიდეთ ლაგრანჟის ცვლადებზე

$$\begin{aligned} &\mathrm{v}_i(x_1, x_2, x_3, t) \\ &= \mathrm{v}_i\left[x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), t\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

და გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი:

$$\begin{aligned} a_i(x_1, x_2, x_3, t) &= \frac{d\mathrm{v}_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t} + \mathrm{v}_k \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}, \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{2.5}$$

თუ გადაადგილებები მცირე სიდიდეებია და გამოვრიცხავთ ფლუქტუაციებს, მაშინ სხეულის ცალკეული წერტილების სიჩქარეებიც მცირე სიდიდეები იქნება. თუ დავუშვებთ, რომ მათი $\dfrac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}$ წარმოებულებიც იმავე რიგის მცირე სიდიდეებია, მაშინ $\mathrm{v}_k \dfrac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}$ სიდიდეები იქნება მეორე რიგის მცირე სიდიდეები. მათი უგულვებელყოფის შემდეგ (2.5)-დან მივიღებთ, რომ

$$a_i = \dot{\mathrm{v}}_i = \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t}.$$

ეს უკანასკნელი კი ემთხვევა (2.3)-ს. საერთოდ, ეს შემთხვევა მეტად მნიშვნელოვანია, რადგან მცირე გადაადგილებები დამახასიათებელია დრეკადი სხეულებისათვის. ვიპოვოთ კავშირი

$$\frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial \xi_k} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial x_k}, \quad i, k = 1,2,3,$$

სიდიდეებს შორის. ცხადია,

$$\frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_1}, \quad i = 1,2,3.$$

მაგრამ

$$\xi_i = x_i - u_i, \tag{2.6}$$

ამიტომ

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

და

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \quad i = 1,2,3.$$

მეორე რიგის მცირე სიდიდეების უგულვებელყოფით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2}=\frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_3}=\frac{\partial u_i}{\partial \xi_3} .$$

§2. ინდივიდუალური წარმოებული

თუ სიჩქარე მოცემულია ეილერის ცვლადებში და გამოისახება (2.4) ფორმულით, მაშინ მისი დიფერენციალი იქნება

$$d\vec{v}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt+\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx+\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy+\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz . \tag{2.7}$$

თუ ამ გამოსახულების ორივე მხარეს გავყოფთ dt-ზე და გავითვალისწინებთ, რომ მოძრავ სითხეში სიჩქარის კომპონენტებია:

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \quad v_y=\frac{dy}{dt}, \quad v_z=\frac{dz}{dt}, \tag{2.8}$$

მივიღებთ, რომ

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}. \tag{2.9}$$

(2.9) გამოსახულებას სიჩქარის ინდივიდუალური, ან სუბსტანციური ან კიდევ სრული წარმოებული ეწოდება. თუ გავიხსენებთ ვექტორული ანალიზის ფორმულებს, (2.9) ასეც შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v} , \tag{2.10}$$

ანდა ტენზორულად

$$\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{2.11}$$

აქ $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$-ს სიჩქარის ლოკალური წარმოებული ეწოდება, ხოლო $\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v}$-ს სიჩქარის კონვექციური წარმოებული.

ამრიგად, t მომენტში x, y, z კოორდინატების მქონე სივრცის წერტილში ინდივიდუალური თხიერი ნაწილაკის სრული წარმოებული $\frac{d\vec{v}}{dt}$ შედგება ორი ნაწილაკისაგან: ლოკალური აჩქარებისაგან, რომელსაც იწვევს დროის მიხედვით სიჩქარის ცვლილება სივრცის მოცემულ წერტილში და კონვექციური აჩქარებისაგან, რომელსაც იწვევს სიჩქარის ველის არაერთგვაროვნება ამ წერტილის მახლობლობაში და რომელიც დაკავშირებულია კონვექციურ გადატანასთან.

თუ $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=0$ მაშინ სიჩქარის ველი სტაციონარულია, მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს, თითქოს სითხეში არ გვქონდეს აჩქარება. სიჩქარის სტაციონარულობა ან არასტაციონარულობა დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე.

თუ $\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v}=0$, მაშინ სიჩქარის ველი ერთგვაროვანია.

§3. ტრაექტორია. დენის წირი. განსაკუთრებული წერტილები.

თხიერი ნაწილაკის ტრაექტორია არის სივრცის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელსაც ნაწილაკი გაივლის დროის მონაკვეთში. ტრაექტორია რომ ვიპოვოთ, უნდა ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(x, y, z, t). \tag{2.12}$$

საწყის პირობებში: $\vec{r} = \vec{r}_0$, როცა $t = t_0$.

დენის წირი ეწოდება წირს, რომლის ყოველ წერტილში გავლებულ სიჩქარეს დროის დაფიქსირებულ მომენტში მხების მიმართულება აქვს. ვექტორულად ეს დებულება გამოისახება ფორმულით

$$\left[d\vec{r} \cdot \vec{v}\right] = 0, \tag{2.13}$$

ხოლო კომპონენტებში გვექნება

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}, \tag{2.14}$$

სადაც t არის ფიქსირებული პარამეტრი. თუ (2.14) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს დამხმარე ცვლადს ds დიფერენციალს გავუტოლებთ, მივიღებთ, რომ

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{v}. \tag{2.15}$$

სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში ტრაექტორიის განტოლებით მარჯვენა მხარე არ იქნება დამოკიდებული t-ზე, ისევე როგორც დენის წირის განტოლების მარჯვენა მხარე. ამიტომ სტაციონარული მოძრაობისას დენის წირი და ტრაექტორია ერთმანეთს დაემთხვევა.

არასტაციონარული მოძრაობისას დენის წირი და ტრაექტორია საზოგადოდ სხვადასხვაა.

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც დენის წირს განსაზღვრავს, აქვს ერთადერთი ამონახსნები, თუ მისი მარჯვენა ნაწილები

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_x}{v_y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{v_y}{v_z}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{v_x}{v_z} \tag{2.16}$$

ცალსახა ფუნქციებს წარმოადგენენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ სივრცის ყოველ წერტილში შეიძლება გატარებულ იქნეს ერთადერთი დენის წირი, მაგრამ, შეიძლება სივრცეში არსებობდეს წერტილები, სადაც $\vec{v} = 0$. მაშინ (2.16)-ის მარჯვენა ნაწილები განსხვავებულნი იქნებიან, ე.ი. იმ წერტილებში, რომლებშიაც $\vec{v} = 0$ გაივლის ერთზე მეტი დენის წირი. ასეთი წერტილები განსაკუთრებული წერტილების ტიპებს განეკუთვნებიან და მათ კრიტიკულ წერტილებს უწოდებენ.

დენის წირის და ტრაექტორიის საპოვნელად განვიხილოთ ორი მაგალითი

1. ვთქვათ, სითხის მოძრაობა მოცემულია სიჩქარის შემდეგი კომპონენტებით

$$v_x = -ay, \; v_y = ax, \; v_z = 0,$$

სადაც a - მუდმივია. ვიპოვოთ დენის წირი.

ამოხსნა: რადგანაც სიჩქარის კომპონენტები დროზე ცხადად არ არიან დამოკიდებულნი, ამიტომ განსახილველი მოძრაობა სტაციონარული იქნება და, მაშასადამე, დენის წირები და ტრაექტორიები ერთმანეთს დაემთხვევა. იმის გამო, რომ $v_z = 0$ მოძრაობა ბრტყელია. ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში კი დენის წირის (2.14) დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ასე ჩაიწეროს :

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}$$

თუ ამ გამოსახულებაში სიჩქარის კომპონენტების გამოსახულებებს შევიტანთ და ცვლადებს განვაცალებთ, მივიღებთ, რომ

$$xdx+ydy=0,$$

ხოლო ამისი ინტეგრება მოგვცემს, რომ

$$x^2+y^2=c,$$

ე.ი. დენის წირები კონცენტრული წრეწირების ოჯახია, რომელთა ცენტრი კოორდინატთა სათავეში მდებარეობს. მოძრაობის მიმართულების დადგენისათვის ვიპოვოთ სიჩქარის ვექტორის და კოორდინატთა ღერძებს შორის კუთხეების კოსინუსები

$$\cos(\vec{v},x)=\frac{v_x}{v}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \cos(\vec{v},y)=\frac{v_y}{v}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

კოორდინატთა სისტემის პირველ მეოთხედში კოორდინატები დადებითია, ამიტომ $\cos(\vec{v},x)\prec 0$, ე.ი. სიჩქარე ox ღერძთან ბლაგ კუთხეს ქმნის და მაშასადამე, მოძრაობის საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით ხდება.

2. სითხის მოძრაობა მოცემულია სიჩქარის შემდეგი კომპონენტებით :

$$v_x=x+t,\quad v_y=-y+t,\quad v_z=0$$

განვსაზღვროთ :

ა. დენის წირთა ოჯახი.

ბ. დენის წირი, რომელიც $t=0$ მომენტში $A(-1,-1)$ წერტილში გადის.

გ. თხიერი ნაწილაკის ტრაექტორია, რომელიც $t=0$ მომენტში იმყოფებოდა $A(-1,-1)$ წერტილში.

ამოხსნა: ნათელია, რომ განსახილველი მოძრაობა ბრტყელია $v_x\neq 0, v_y\neq 0, v_z=0$ და არასტაციონარული, რადგან სიჩქარის კომპონენტები ცხადად შეიცავენ t დროს. ამიტომ ამ შემთხვევაში დენის წირის (2.26) დიფერენციალური განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{dx}{x+t}=\frac{dy}{-y+t}.$$

მისი ინტეგრება მოგვცემს (t - ფიქსირებულად ითვლება), რომ

$$\ln(x+t)=-\ln(-y+t)+\ln c$$

ანუ

$$(t+x)(t-y)=c$$

ე.ი. დენის წირის ოჯახი დროის ყოველ მომენტში ჰიპერბოლათა ოჯახია. რომ ვიპოვოთ დენის წირი, რომელიც $t=0$ მომენტში გადის $A(-1,-1)$ წერტილში, უნდა ვიპოვოთ c მუდმივის მნიშვნელობა. ამისათვის მიღებულ ამონახსნში ჩავსვათ მნიშვნელობები $t=0, x=-1, y=-1$. მაშინ გვექნება

$$(-1)(+1)=C, \text{ე.ი.}\quad C=-1$$

და ამ დენის წირის განტოლება იქნება

$$xy=1.$$

ახლა ვიპოვოთ ტრაექტორია. ამისათვის ვაინტეგროთ მოძრაობის განტოლებები:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = t + x,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = t - y.$$

ეს განტოლებები პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებებია და მათი ამოხსნა ასე წარმომოიდგინება:

$$x = C_1 e^t - t - 1, \qquad y = C_2 e^{-t} + t - 1 \ .$$

რომ ვიპოვოთ იმ თხიერი ნაწილაკის ტრაექტორია, რომელიც $t = 0$ მომენტში $A(-1,-1)$ წერტილში იმყოფება. განვსაზღვროთ C_1 და C_2 მუდმივები.

მივიღებთ, რომ $C_1 = 0, C_2 = 0$. ამრიგად, საძიებელი ტრაექტორია იქნება

$$x = -t - 1, y = t - 1,$$

საიდანაც t-ის გამორიცხვით მივიღებთ $x + y = -2$, რომელიც წრფის განტოლებაა და არ ემთხვევა დენის წირს.

ლექცია 3
თავი 3

სითხის მოძრაობის განტოლებები

ჰიდრომექანიკას საფუძვლად უდევს შენახვის ფუნდამენტური კანონები: მასის, მოძრაობის რაოდენობის (იმპულსის), მოძრაობის რაოდენობის მომენტისა და ენერგიის შენახვის კანონები. ეს თავი ეძღვნება იმ განტოლებათა გამოყვანას, რომლებიც ამ კანონების მათემატიკურ ფორმულირებას წარმოადგენენ.

§1. სითხის მასის შენახვის კანონი. უწყვეტობის განტოლება

მექანიკის ერთ-ერთ ძირითად კანონს მასის შენახვის კანონი წარმოადგენს. ეს ფიზიკური კანონი სამართლიანია ისეთ მოძრაობათა შემთხვევაში, რომელთა სიჩქარეები სინათლის გავრცელების სიჩქარესთან შედარებით მცირენი არიან. სითხის მასის შენახვის კანონი უწყვეტობის განტოლებას გვაძლევს.

განვიხილოთ სითხეში S ზედაპირით შემოსაზღვრული რაიმე τ მოცულობა. დროის t მომენტში ამ მოცულობაში არსებული სითხის მასა იყოს M. თუ $\rho(\vec{r},t)$ არის სითხის სიმკვრივე, მაშინ ამ სითხის მასა იქნება

$$M = \int_\tau \rho d\tau \ .$$

დავუშვათ, რომ სითხეში არ არსებობს მასის არც წყაროები და არც ჩასადენები. მაშინ სითხის მოძრაობისას დროის t მომენტში τ მოცულობაში არსებული სითხის მასა შენახული უნდა იქნეს, ე.ი.

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho d\tau = 0 \, . \tag{3.1}$$

წარმოებულის განმარტების თანახმად

$$
\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(t)}\rho(x_1,x_2,x_3,t)d\tau
$$

$$
=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{\tau(t+\Delta t)}\rho(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t)d\tau-\int\limits_{\tau(t)}\rho(x_1,x_2,x_3,t)d\tau}{\Delta t}
$$

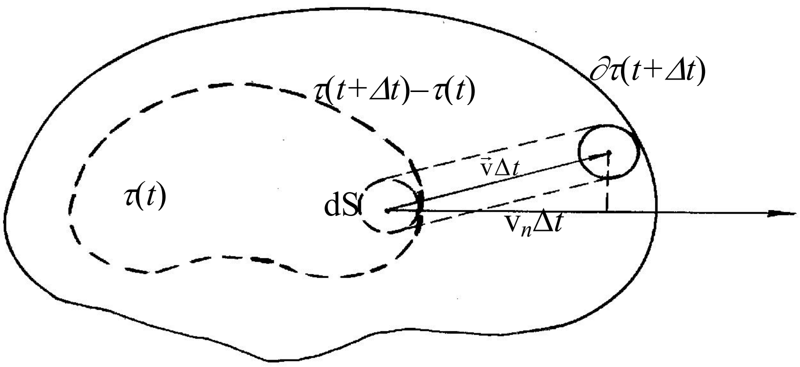
$$
=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\int\limits_{\tau(t+\Delta t)-\tau(t)}\rho(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t)d\tau}{\Delta t}+\frac{\int\limits_{\tau(t)}\left[\rho(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t)-\rho(x_1,x_2,x_3,t)\right]d\tau}{\Delta t}\right\}
$$

$$
=\int\limits_{\partial\tau(t)}\rho(x_1,x_2,x_3,t)\mathrm{v}_n(x_1,x_2,x_3,t)dS+\int\limits_{\tau(t)}\frac{\partial\rho(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t}d\tau,
$$

რადგან $\tau(t+\Delta t)-\tau(t)$ მოცულობა შედგება ელემენტარული

$$
d\tau=\mathrm{v}_n dS\Delta t
$$

ცილინდრებისაგან (იხ. ნახ. 3.1) და, როცა $\Delta t\to 0$, $\partial\tau(t+\Delta t)$ ზედაპირი მიისწრაფის $\partial\tau(t)$ ზედაპირისაკენ, ხოლო $\rho\left(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t\right)$ სიმკვრივე _ $\rho\left(x_1,x_2,x_3,t\right)$-სკენ.



ნახ. 3.1

მაგრამ, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის თანახმად,

$$
\int\limits_{\partial\tau(t)}\rho\mathrm{v}_n dS=\int\limits_{\partial\tau(t)}\rho\mathrm{v}_i n_i dS=\int\limits_{\tau(t)}\left(\rho\,\mathrm{v}_i\right)_{,i}d\tau .
$$

როგორც მთელი მოძრავი გარემოსათვის, ასევე მისგან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ნაწილისათვის, გამომდინარეობს, რომ

$$
\int\limits_{\tau(t)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\rho\,\mathrm{v}_i\right)_{,i}\right]d\tau=0 . \tag{3.2}
$$

უკანასკნელი ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი τ მოცულობის შემთხვევაში ეს კი შესაძლებელია მაშინ, როცა (3.2) ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლია, ე.ი. როცა ადგილი აქვს ტოლობას:

$$
\frac{d\rho}{dt}+\rho div\vec{v}=0 \tag{3.3}
$$

მიღებულ განტოლებას უწყვეტობის განტოლებას უწოდებენ. იგი მასის შენახვის კანონის დიფერენციალური სახით ჩაწერას გამოხატავს.

თუ გამოვიყენებთ ტოლობას

$$
\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}grad\rho ,
$$

(3.3)-დან მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}grad\rho+\rho div\vec{v}=0\,, \qquad (3.4)$$

ხოლო $div\rho\vec{v}=\vec{v}grad\rho+\rho div\vec{v}$ ტოლობის გამოყენებით საბოლოოდ გვექნება

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\vec{v}=0\,. \qquad (3.5)$$

(3.3), (3.4), (3.5) ფორმულები წარმოადგენენ უწყვეტობის განტოლების სხვადასხვა ფორმით ჩაწერილ გამოსახულებებს.

უკუმშველი სითხე (არაკუმშვადი სითხე). სითხეს ეწოდება უკუმშველი, თუ

$$\frac{d\rho}{dt}=0\,, \qquad (3.6)$$

ანუ $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}grad\rho=0$.

უკუმშველი სითხისათვის (3.3) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$div\vec{v}=0\,. \qquad (3.7)$$

(3.7) განტოლება წარმოადგენს უკუმშველი სითხის უწყვეტობის განტოლებას. ფიზიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ უკუმშველი სითხის მოცულობა სიდიდით კი არ იცვლება, მხოლოდ ფორმას იცვლის. ამავე დროს (3.8) გვიჩვენებს, რომ უკუმშველი სითხის სიჩქარული ველი სოლენოიდურია და სითხის მოცულობითი გაფართოება მოძრაობის მთელ არეში ნულის ტოლია.

თუ მოძრაობის სტაციონარულია, მაშინ სიმკვრივის ლოკალური წარმოებული $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$ ამიტომ სტაციონარული მოძრაობისას უწყვეტობის განტოლებას ასეთი სახე ექნება:

$$div\rho\vec{v}=0\,, \qquad (3.9)$$

ანუ კოორდინატებში

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}+\frac{\partial\rho v_z}{\partial z}=0\,. \qquad (3.10)$$

თუ სითხე უკუმშველია და ერთგვაროვანი, მაშინ $\rho=const$ და (3.6) განტოლება იგივურად ნულია.

უწყვეტობის განტოლება მრუდწირულ კოორდინატებში

ვთქვათ, q_1,q_2,q_3- მრუდწირული ორთოგონალური კოორდინატებია და კავშირი q_1,q_2,q_3 კოორდინატებსა და დეკარტის x,y,z კოორდინატებს შორის მოიცემა თანაფარდობით :

$$x=x(q_1,q_2,q_3),y=y(q_1,q_2,q_3),z=z(q_1,q_2,q_3),$$

მაშინ უწყვეტობის განტოლების მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში ასეთი სახე ექნება :

$$H_1H_2H_3\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q_1}(\rho v_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(\rho v_2H_1H_3)+\frac{\partial}{\partial q_3}(\rho v_3H_1H_2)=0\,. \qquad (3.11)$$

სადაც H_i-ლამეს კოეფიციენტებია

$$H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2},i=1,2,3\,. \qquad (3.12)$$

ხოლო v_i სიჩქარის კომპონენტებია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები.

ა. ცილინდრულ $R,Q.Z$ კოორდინატებში:

$$q_1 = r, q_2 = Q, q_3 = z, v_1 = v_r, v_2 = v_Q, v_3 = v_z$$
$$x = r\cos Q, y = r\sin Q, z = r \tag{3.13}$$
$$H_1 = H_r = 1, H_2 = H_Q = r, H_3 = H_z = 1$$

და უწყვეტობის განტოლებას ექნება სახე :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial Q}(\rho v_Q) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_z) = 0$$

ბ. სფერულ კოორდინატებში :

$$q_1 = r,\ \ q_2 = Q \quad q_3 = \lambda,\ \ v_1 = v_r,\ \ v_2 = v_Q,\ \ v_3 = v_\lambda,$$
$$x = r\sin Q\cos\lambda, y = r\sin Q\sin\lambda, z = r\cos\lambda,$$
$$H_1 = H_r = 1, H_2 = H_Q = r, H_3 = H_\lambda = r\sin Q,$$

და უწყვეტობის განტოლებას ექნება სახე:

$$r^2\sin Q\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r^2 v_r \sin Q\right) + \frac{\partial}{\partial Q}\left(\rho r v_Q \sin Q\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}(\rho r v_\lambda) = 0 \tag{3.14}$$

<u>უწყვეტობის განტოლების გამოყვანის სხვა მეთოდი</u>

ვთქვათ, მოცემულია უძრავი ჩაკეტილი ნებისმიერი ფორმის S ზედაპირით შემოსაზღვრული τ მოცულობა: ამ ზედაპირში $\rho\vec{v}$ ვექტორის ნაკადი ტოლია

$$\int_S \rho v_n ds \text{ -ისა },$$

რომელიც გაუსის ფორმულით ასე შეიძლება გადაიწეროს

$$\int_S \rho v_n ds = \int_\tau div\rho\vec{v}d\tau .$$

$\vec{n}$ აქ S ზედაპირის გარე ნორმალია. ეს ნაკადი გამოსახავს სითხის იმ მასას, რომელიც გამოედინება S ჩაკეტილი ზედაპირიდან. ეს კი გამოიწვევს S ზედაპირის შიგნით სიმკვრივის შემცირებას დროის გარკვეულ ერთეულში სიდიდით

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

ხოლო სითხის მასის შემცირება ამ ზედაპირის შიგნით იქნება

$$-\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau .$$

ამრიგად, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$-\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau = \int_\tau div\rho\vec{v}d\tau$$

საიდანაც , $d\tau$ მოცულობის ნებისმიერობის გამო გვექნება

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0 .$$

ლექცია 4

<u>§2. სითხის მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი. მოძრაობის განტოლება ძაბვებში.</u>

მოძრაობის რაოდენობის კანონი ამყარებს კავშირს მოძრაობის რაოდენობის ცვლილებასა და იმ ძალებს შორის, რომელიც ამ ცვლილებას იწვევენ. მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი სითხის მოძრაობის განტოლებებს გვაძლევს.

სითხის მოძრაობის შესწავლის დროს განიხილავენ ისეთ ძალებს, რომლებიც უწყვეტად არიან განაწილებული მოცულობაში ან მის ზედაპირზე.

მოცულობითი და ზედაპირული ძალები. სითხის ნაწილაკებზე მოქმედი ძალები ორ ჯგუფად იყოფა.

პირველ ჯგუფს განეკუთვნება მოცულობითი ძალები, ანუ ის ძალები, რომლებიც მოქმედებენ მოცულობის ელემენტზე. ვთქვათ, $\vec{F}^M$ არის იმ ძალების ნაკრები ვექტორი, რომლებიც მოქმედებენ τ მოცულობაში მოთავსებული M მასის მქონე სითხეზე. მაშინ M მასაზე მოქმედი საშუალო მოცულობით ძალა იქნება

$$\vec{F}_{sas} = \frac{\vec{F}^M}{M}, \tag{3.15}$$

ხოლო $\vec{F} = \lim\limits_{\tau \leftarrow 0} \vec{F}_{sas} = \lim\limits_{\tau \to 0} \frac{\vec{F}^M}{M} = \frac{1}{\rho} \lim\limits_{\tau \to 0} \frac{\vec{F}^M}{\tau}$ (3.16)

ვექტორს ეწოდება მოცულობითი ანუ მასიური ძალა მოცემულ წერტილში.
მოცულობითი ძალების მაგალითს წარმოადგენს სიმძიმის ძალა, რომელიც მასის ერთეულზე მოქმედებს და $\vec{F} = \vec{g}$.

$\vec{F}$ ძალა კოორდინატებისა და დროის ფუნქციაა

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t). \tag{3.17}$$

თუ $\vec{F}$ ძალა ცნობილია გამოყოფილი τ მოცულობის ყოველ წერტილში, მაშინ $\vec{F}^M$ ძალების ნაკრები ვექტორი, რომელიც მოქმედებს სითხეში გამოყოფილი მოცულობის მასაზე იქნება

$$\vec{F}^M = \int\limits_{\tau} \rho \vec{F} d\tau, \tag{3.18}$$

სადაც იგულისხმება, რომ $d\tau$ მოცულობაზე, რომლის მასაა $dm = \rho dx$ მოქმედებს $\vec{F}dm = \rho \vec{F} d\tau$ ძალა.

ძალების მეორე ჯგუფს ზედაპირული ძალები განეკუთვნება. ვთქვათ, τ მოცულობა შემოსაზღვრულია S ზედაპირით. სითხე, რომელიც იმყოფება გამოყოფილი τ მოცულობის გარეთ, მოქმედებს τ მოცულობაში მოთავსებულ სითხეზე S ზედაპირის საშუალებით. ამ ძალებს ზედაპირულ ძალებს უწოდებენ.

გამოვყოთ S ზედაპირის ΔS ელემენტი, რომლის ნორმალი იყოს $\vec{n}$. ზედაპირული ძალების ნაკრები ვექტორი, რომელიც ΔS ელემენტზე მოქმედებს, ასე აღვნიშნოთ $\Delta \vec{F}_n^{\,s}$. მაშინ საშუალო ძაბვა, რომელიც მოქმედებს ΔS ფართზე, იქნება

$$\vec{\sigma}_n^{sas} = \frac{\Delta \vec{F}_n^{sas}}{\Delta S}. \tag{3.19}$$

და თუ ΔS იკუმშება წერტილისაკენ, მაშინ ვექტორი

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \vec{\sigma}_n^{sas} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_n^S}{\Delta S} \cdot \qquad (3.20)$$

იწოდება ზედაპირული ძალების ძაბვად, რომელიც მოქმედებს განსახილველ წერტილში. $\vec{\sigma}_n$ ვექტორი დამოკიდებულია, როგორც წერტილის კოორდინატებზე და დროზე, ისე ფართის მდებარეობაზე, ე.ი. $\vec{n}$ ნორმალის მიმართულებაზე. (3.20)-დან გამომდინარეობს, რომ ზედაპირის ds ელემენტზე მოქმედებს $\vec{\sigma}_n ds$ ძალა. S ზედაპირზე მოქმედი ზედაპირული ძალების ნაკრები ვექტორი მოიცემა ფორმულით

$$\vec{F}^S = \int_S \vec{\sigma}_n ds . \qquad (3.21)$$

ზედაპირული ძალები აღწერენ სითხის სხვადასხვა ნაწილების ურთიერთქმედებას.

გამოვიყვანოთ ახლა სითხის მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი. მოძრავ სითხეში გამოვყოთ S ზედაპირის მქონე τ მოცულობა. ვთქვათ, $\vec{k}$ არის τ მოცულობაში მოთავსებული სითხის მასის მოძრაობის რაოდენობა. $d\tau$ ელემენტარულ მოცულობაში მოთავსებული მოძრაობის რაოდენობა იქნება

$$\Delta\vec{k} = \rho\vec{v}d\tau ,$$

ხოლო τ მოცულობაში მოთავსებული სითხის მასის მოძრაობის რაოდენობა კი

$$\vec{k} = \int_\tau \rho\vec{v}d\tau . \qquad (3.22)$$

სითხის გამოყოფილი მასისათვის $\vec{k}$ ვექტორი, და ასევე τ მოცულობა, დროის ფუნქციებია.

სითხის მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: სითხის მასის მოძრაობის რაოდენობის დროით წარმოებული ტოლია ამ მასაზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები ვექტორისა. მაშასადამე,

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{F}^M + \vec{F}^S . \qquad (3.23)$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ (3.18) და (3.21) ფორმულებს, მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\vec{v}d\tau = \int_\tau \rho\vec{F}d\tau + \int_S \vec{\sigma}_n ds . \qquad (3.24)$$

თუ ვისარგებლებთ (3.2) ფორმულით, გვექნება:

$$\int_\tau \left(\frac{d\rho\vec{v}}{dt} + \rho\vec{v}div\vec{v} - \rho\vec{F} \right) d\tau = \int_S \vec{\sigma}_n ds . \qquad (3.25)$$

ეს უკანასკნელი სითხის მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონია ინტეგრალური სახით.

§3. კოშის ფორმულა. ძაბვის ტენზორი. სითხის მოძრაობის განტოლება ძაბვაში

ჩავწეროთ მოძრაობის რაოდენობის კანონი τ მოცულობის კერძო შემთხვევისათვის. τ მოცულობად ავიღოთ ისეთი ტეტრაედრი, რომლის სამი წახნაგი კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელური იქნება. აღვნიშნოთ ამ წახნაგების ფართობებია S_x, S_y, S_z სიმბოლოებით, ხოლო მათი გარე ნორმალები მიმართული იყოს Ox, Oy, Oz ღერძების მიმართულების საწინააღმდეგოდ, ამას გარდა, მეოთხე წახნაგის გარე ნორმალი აღვნიშნოთ $\vec{n}$-ით, ხოლო ფართობი S_n-ით.

ვთქვათ , $\vec{\sigma}_{-x}, \vec{\sigma}_{-y}, \vec{\sigma}_{-z}, \vec{\sigma}_n$ - თითოეულ წახნაგზე მოქმედი ძაბვებია.

გამოვიყენოთ ტეტრაედრისათვის (3.25) ფორმულა და გვექნება

$$\int_\tau \left(\frac{d\rho\vec{v}}{dt} + \rho\vec{v}div\vec{v} - \rho\vec{F} \right) d\tau = \int_{S_x} \vec{\sigma}_{-x} ds + \int_{S_y} \vec{\sigma}_{-y} ds + \int_{S_y} \vec{\sigma}_{-z} ds + \int_{S_n} \vec{\sigma}_n ds \,. \tag{3.26}$$

სადაც S_x, S_y, S_z - წარმოადგენენ S_n გეგმილებს x, y, z ღერძებზე:

$$S_x = S_n \cos(\hat{n}, x), S_y = S_n \cos(\hat{n}, y), S_z = S_n \cos(\hat{n}, z).$$

აღვნიშნოთ h-ით ტეტრაედრის სიმაღლე, მაშინ მისი მოცულობა იქნება $\tau = \frac{1}{3} S_n h$ და, თუ ვისარგებლებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემით, (3.26) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$\left(\frac{d\rho\vec{v}}{dt} + \rho\vec{v}div\vec{v} - \rho\vec{F} \right)_{sas} \frac{1}{3} S_n h = S_n \cos(\hat{n}x)\vec{\sigma}_{-x}^{sas} + S_n \cos(\hat{n}y)\vec{\sigma}_{-y}^{sas} + S_n \cos(\hat{n}z)\vec{\sigma}_{-z}^{sas} + S_n \vec{\sigma}_n^{sas} \,. \tag{3.27}$$

თუ (3.27) ორივე ნაწილს გავყოფთ S_n-ზე გადავალთ ზღვარზე, როცა $R \to 0$, მაშინ ტოლობის მარცხენა ნაწილი ნულად გადაიქცევა, მარჯვენა ნაწილში კი $\vec{\sigma}_i^{sas}$ მიიღებენ $\vec{\sigma}_i$ მნიშვნელობებს ნულ წერტილში, რის შედეგადაც გვექნება:

$$\vec{\sigma}_{-x} \cos(\hat{n}x) + \vec{\sigma}_{-y} \cos(\hat{n}y) + \vec{\sigma}_{-z} \cos(\hat{n}z) + \vec{\sigma}_n = 0 \,. \tag{3.28}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\vec{\sigma}_i = -\vec{\sigma}_{-i}$$

ამიტომ (3.28) ასე შეიძლება გადაიწეროს

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cos(\hat{n}x) + \vec{\sigma}_y \cos(\hat{n}y) + \vec{\sigma}_z \cos(\hat{n}z). \tag{3.29}$$

მიღებულ ფორმულას კოშის ფორმულას უწოდებენ. ის საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ ძაბვა $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ფართის წერტოლში, თუ ცნობილია, $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ ძაბვები. $\vec{\sigma}_i$ - წარმოადგენს ძაბვას იმ ფართზე, რომელიც i ღერძის მართობულია. თითოეული $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ ვექტორს სამი კომპონენტი გააჩნია

$$\begin{aligned} &\vec{\sigma}_x (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}), \\ &\vec{\sigma}_y (\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}), \\ &\vec{\sigma}_z (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}). \end{aligned} \tag{3.30}$$

კოშის ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ძაბვა ნებისმიერად ორიენტირებული ფართის წერტილში შეიძლება გამოითვლოს, თუ ცნობილია ცხრა სიდიდისაგან შემდგარი მატრიცა

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

(3.29) ფორმულა გვიჩვენებს აგრეთვე, რომ გარე ზედაპირული ძალთა $\int_S \vec{\sigma}_n ds$ ჯამი, რომელიც მოქმედებს S ზედაპირით შემოსაზღვრული სითხის τ მოცულობაზე გაუსის ფორმულით შეიძლება, რომ მოცულობით ინტეგრალში გარდავქმნათ:

$$\int_S \vec{\sigma}_n ds = \int_\tau \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) d\tau \,. \tag{3.32}$$

თუ უკანასკნელ გამოსახულებას გავითვალისწინებთ (3.25) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\int_\tau \left[\frac{d\rho\vec{v}}{dt} + \rho\vec{v}div\vec{v} - \rho\vec{F} - \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) \right] d\tau = 0 . \qquad (3.33)$$

ეს არის მოძრაობის რაოდენობის კანონი ჩაწერილი ინტეგრალური სახით. რადგანაც ამ ფორმულას ადგილი აქვს ნებისმიერი მოცულობისათვის, ამიტომ

$$\frac{d\rho\vec{v}}{dt} + \rho\vec{v}div\vec{v} = \rho\vec{F} + \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} \right). \qquad (3.34)$$

თუ მარცხენა მხარის პირველ შესაკრებში მოვახდენთ დიფერენცირებას და გავითვალისწინებთ უწყვეტობას (3.3) განტოლებას, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} . \qquad (3.35)$$

ეს ტოლობა სითხის მოძრაობის რაოდენობის კანონს გამოსახავს დიფერენციალური სახით. მას ზოგად შემთხვევაში **სითხის მოძრაობის განტოლება ეწოდება ძაბვებში.**

ლექცია 5

§4. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი. ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულია.

მექანიკური სისტემისათვის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი ასეა ჩამოყალიბებული: რაიმე სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის დროით წარმოებული ამ სისტემის მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები მომენტის ტოლია.

თხიერი ნაწილაკისათვის გამოყენებული ეს კანონი არ გვაძლევს რაიმე განტოლებას. იგი მხოლოდ ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობას გამოხატავს.

განვიხილოთ სითხეში S ზედაპირით შემოსაზღვრული რაიმე τ მოცულობა. მისი მასა იქნება $\rho d\tau$, მოძრაობის რაოდენობა კი - $\rho\vec{v}d\tau$. მოძრაობის რაოდენობის მომენტი, კოორდინატთა სათავის მიმართ, რომელიც დაკავშირებულია გადატანით მოძრაობასთან იქნება $[\vec{r}\rho\vec{v}]d\tau$. ამ სიდიდეს ხშირად ორბიტალურ მომენტს უწოდებენ.

τ მოცულობაში მოთავსებული სითხის მოძრაობის რაოდენობის ორბიტალური მომენტი $\vec{L}$ იქნება

$$\vec{L} = \int_{\tau}[\vec{r}\cdot\rho\vec{v}]d\tau. \tag{3.36}$$

ბევრი სითხისათვის მოძრაობის რაოდენობის სრული მომენტი ემთხვევა მის ორბიტალურ მომენტს. ჩვენ მხოლოდ ამ შემთხვევას განვიხილავთ. განვიხილოთ τ მოცულობაში მოთავსებული სითხის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის გადატანის განტოლება. მოცულობის $d\tau$ ელემენტებზე მოქმედი მოცულობითი ძალა ტოლია $\rho\vec{F}dx$ –ისა, ხოლო ამ ძალის მომენტი – $[\vec{r}\rho\vec{F}]dx$ –ისა. მაშასადამე, მოცულობითი ძალების მომენტთა ნაკრები ვექტორი იქნება

$$\vec{M}_1 = \int_{\tau}\left[\vec{r}\cdot\rho\vec{F}\right]d\tau. \tag{3.37}$$

$\vec{n}$ ნორმალის მქონე ზედაპირის ds ელემენტზე მოქმედი ზედაპირული ძალა ტოლია $\vec{\sigma}_n ds$ – ისა. ამ ძალების მომენტთა ნაკრები ვექტორი კი იქნება

$$\vec{M}_2 = \int_{S}\left[\vec{r}\,\vec{\sigma}_n\right]ds. \tag{3.38}$$

ვთქვათ, სითხეში სხვა ძალთა და წყვილძალთა მომენტები არა გვაქვს, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს ექნება ასეთი სახე:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_1 + \overline{M}_2,$$

ანუ

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}[\vec{r}\cdot\rho\vec{v}]d\tau = \int_{\tau}\left[\vec{r}\cdot\rho\vec{F}\right]d\tau + \int_{S}[\vec{r}\cdot\overline{\sigma}_n]ds. \tag{3.39}$$

თუ ვისარგებლებთ (3.2) და (3.3) ფორმულით, (3.39) განტოლების მარცხენა მხარეში გვექნება

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}[\vec{r}\cdot\rho\vec{v}]d\tau = \int_{\tau}\left(\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot\rho\vec{v}]+[\vec{r}\cdot\rho\vec{v}]div\vec{v}\right)d\tau = \int_{\tau}\left(\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\rho\vec{v}\right]+\left[\vec{r}\cdot\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\right]+\left[\vec{r}\cdot\vec{v}\frac{d\rho}{dt}\right]+[\vec{r}\cdot\rho\vec{v}]div\vec{v}\right)d\tau$$

$$=\int_{\tau}\left(\left[\vec{r}\cdot\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\right]+[\vec{r}\cdot\vec{v}]\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho div\vec{v}\right)\right)d\tau = \int_{\tau}\left[\vec{r}\cdot\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\right]. \tag{3.40}$$

გავითვალისწინოთ მიღებული ფორმულა და (3.38), მივიღებთ, რომ

$$\int_{\tau}\left[\vec{r}\cdot\rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}-\vec{F}\right)\right]d\tau = \int_{S}[\vec{r}\cdot\vec{\sigma}_n]ds. \tag{3.41}$$

თუ ახლა კოშის და გაუსის ფორმულითაც ვისარგებლებთ, მაშინ მარჯვენა მხარე შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\int_S [\vec r\,\vec\sigma_n]ds=\int_S \left[\vec r\left(\vec\sigma_x\cos(\hat{n}x)+\vec\sigma_y\cos(\hat{n}y)+\vec\sigma_z\cos(\hat{n}z)\right)\right]ds=\int_\tau\left(\frac{\partial[\vec r\,\vec\sigma_x]}{\partial x}+\frac{\partial[\vec r\,\vec\sigma_y]}{\partial y}+\frac{\partial[\vec r\,\vec\sigma_z]}{\partial z}\right)d\tau=$$

$$\int_\tau\left(\left[\frac{\partial\vec r}{\partial x}\vec\sigma_x\right]+\left[\frac{\partial\vec r}{\partial y}\vec\sigma_y\right]+\left[\frac{\partial\vec r}{\partial z}\vec\sigma_z\right]+\left[\vec r\left(\frac{\partial\vec\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec\sigma_z}{\partial z}\right)\right]\right)d\tau\,.$$

საბოლოოდ კი მივიღებთ:

$$\int_\tau\left\{\left[\vec r\cdot\rho\left(\frac{d\vec v}{dt}-\vec F-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\vec\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec\sigma_z}{\partial z}\right)\right)\right]\right\}d\tau=\int_\tau\left\{\left[\frac{\partial\vec r}{\partial x}\vec\sigma_x\right]+\left[\frac{\partial\vec r}{\partial y}\vec\sigma_y\right]+\left[\frac{\partial\vec r}{\partial z}\vec\sigma_z\right]\right\}d\tau\,.$$

მოძრაობის რაოდენობის (3.35) კანონის გათვალისწინება მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარეს ნულად გადააქცევს, ხოლო რადიუს ვექტორის წარმოებულაბი ტოლი იქნება

$$\frac{\partial\vec r}{\partial x}=\vec i\,,\frac{\partial\vec r}{\partial y}=\vec j\,,\frac{\partial\vec r}{\partial z}=\vec k\,.$$

ყოველივე ამის მხედველობაში მიღება საბოლოოდ მოგვცემს, რომ

$$\int_\tau\left(\left[\vec i\,\vec\sigma_x\right]+\left[\vec j\,\vec\sigma_y\right]+\left[\vec k\,\vec\sigma_z\right]\right)d\tau=0\,,$$

რაც მოცულობის ელემენტის ნებისმიერობის გამო ასე ჩაიწერება

$$\left[\vec i\,\vec\sigma_x\right]+\left[\vec j\,\vec\sigma_y\right]+\left[\vec k\,\vec\sigma_z\right]=0\,. \tag{3.42}$$

(3.42) ტოლობის თითოეული შესაკრები წარმოვადგინოთ დეტერმინანტის სახით

$$\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & 0 & 0\\ \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & 1 & 0\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & 0 & 1\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{vmatrix}=0$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\vec i\left(\sigma_{yz}-\sigma_{zy}\right)+\vec j\left(\sigma_{zx}-\sigma_{xz}\right)+\vec k\left(\sigma_{xy}-\sigma_{yx}\right)=0\,. \tag{3.43}$$

ეს ვექტორული ჯამი რომ ნულის ტოლი იყოს, საჭიროა თითოეული შესაკრები იყოს ნულის ტოლი. ამიტომ როგორც მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, ძაბვის ტენზორი სიმეტ-რიული ტენზორია

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}\,,\sigma_{zx}=\sigma_{xz}\,,\sigma_{yz}=\sigma_{zy}\,. \tag{3.44}$$

ამრიგად, ძაბვის ტენზორის ცხრა კომპონენტიდან მხოლოდ ექვსია ერთმანეთისაგან განსხ-ვავებული.

მაშასადამე, მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი არ გვაძლევს ახალ განტოლებას. ის ზღუდავს ძაბვის ტენზორს, ხდის მას სიმეტრიულ ტენზორად.

ლექცია 6

§5. ენერგიის შენახვის კანონი. ენერგიისა და სითბოს გადატანის განტოლებები

ფიზიკის ფუნდამენტურ კანონს ენერგიის შენახვის კანონი წარმოადგენს. ამ თავში ჩვენ დავადგენთ, თუ რა სახის ენერგიებისაგან შედგება თხევადი მოცულობის სრული ენერგია, ენერგიის რა ნაკადს იღებს ეს მოცულობა გარე არიდან და ამასთანავე გავითვალისწინებთ ენერგიის ერთი სახიდან მეორეში გადასვლას.

1. სითბოს გადატანა

თუ მოცულობაში, რომელიც დაკავებულია მყარი, თხევადი ან აირადი ნაწილაკებით, დროის რომელიმე მომენტში ადგილი აქვს ტემპერატურათა სხვაობას, მაშინ სითბო დაიწყებს გავრცელებას მაღალი ტემპერატურის მქონე წერტილებიდან დაბალი ტემპერატურის მქონე წერტილებისაკენ.

სითბოს გადატანა რამდენიმე გზით შეიძლება: კონდუქციური, კონვექციური ან გამოსხივე-ბის გზით.

კონდუქციური ეწოდება სითბოგადაცემას, რომელიც წარმოებს სხეულის სხვადასხვა ტემპერატურის მქონე ნაწილაკების ურთიერთშეხებისას. ამ პროცესის განმასხვავებელი ნიშანი ის არის, რომ პროცესი ატომურ–მოლეკულურ ხასიათს ატარებს და არ არის დაკავშირებული მაკროსკოპულ გადაადგილებასთან. ამ გზით ხდება სითბოს გადატანა მყარ სხეულებში და ნაწილობრივ სითხეებსა და აირებშიც. უძრავ და მოძრავ სითხეებსა და აირებში მოლეკულებს არა აქვთ დაფიქსირებული მდგომარეობა. ისინი უწყვეტად ირხევიან, ან გადაადგილდებიან და ამიტომ სითბოს გადასცემენ ერთმანეთს.

სითხეებსა და აირებში სითბოს გადატანა წარმოებს სითხისა და აირის მაკრომოცულობების გადაადგილების გზით. თხევადი ნაწილაკების ზომები გაცილებით მეტია მათ მოლეკულურ ზომებზე. სითბოს ასეთ გადაცემას კონვექციური ეწოდება. ჩვეულებრივ განასხვავებენ ბუნებ-რივ და იძულებით კონვექციებს. ბუნებრივი ანუ თავისუფალი კონვექცია ეწოდება სითბოს გადაცემას, როდესაც სითხის ან აირის ნაწილაკების გადაადგილება, რომლებიც სითბოს მატა-რებელნი არიან, გამოწვეულია მხოლოდ სიმკვრივეთა სხვაობით. ეს უკანასკნელი კი იქმნება ტემპერატურათა სხვაობის გამო. თუ სითბოს გადამტანი ნაწილაკების გადაადგილება ხდება არა სიმკვრივეთა სხვაობის გამო, არამედ იძულებითი მოძრაობით (მაგალითად, ვენტილატორის წყალობით), მაშინ კონვექციას იძულებით უწოდებენ.

სხივური სითბოგადაცემა არის სითბოგადაცემა გაცხელებული სხეულებს შორის, რაც გამოწვეულია სხივური ენერგიის გამოსხივებით, არეკვლით, შთანთქმით ან გატარებით. სხივური სითბოგადაცემა შეიძლება წარმოებდეს, მაშინაც კი, თუ არ არსებობს სხეულებს შორის რაიმე გარემო (მაგალითად, ვაკუუმში). ამით განსხვავდება სხივური სითბოგადაცემა ზემო-ჩამოთვლილი სითბოგადაცემებისაგან.

სხივური სითბოგადაცემის ბუნება და კანონზომიერებანი ტალღური ხასიათისაა, ისევე რო-გორც ელექტრომაგნიტური ტალღებისა. ისინი ერთმანეთისაგან მხოლოდ ტალღის სიგრძით განსხვავდებიან.

გამოვიყვანოთ ახლა ენერგიის გადატანის განტოლება. იგი მდგომარეობს შემდეგში: სითხის ან აირის სრული ენერგიის ცვლილება ტოლია დროის ერთეულში მოცულობითი და ზედაპი-რული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობისა და დროის ერთეულში გარედან მიღებული სითბოს რაოდენობის ჯამისა.

აღვნიშნოთ e–ით სითხის ერთეულოვანი მასის შინაგანი ენერგია. მაშინ τ მოცულობის მქონე სითხის შინაგანი ენერგია იქნება

$$E = \int_{\tau} \rho e d\tau \,. \tag{3.45}$$

$\vec{v}$ სიჩქარით მოძრავი dm მასის მქონე სითხის კინეტიკური ენერგია ტოლია $\frac{v^2}{2}dm = \frac{\rho v^2}{2}d\tau$. მაშასადამე, τ მოცულობაში მოთავსებული სითხის კინეტიკური ენერგია იქნება

$$\int_\tau \frac{1}{2}\rho v^2 d\tau \ , \tag{3.46}$$

ხოლო სითხის განსახილველი მასის სრული ენერგია იქნება

$$u = \int_\tau \rho\left(\frac{v^2}{2} + e\right)d\tau \ . \tag{3.47}$$

როგორც ვთქვით, სითხის განსახილველი მასის სრული ენერგიის ცვლილება უნდა მოხდეს მოცულობითი და ზედაპირული ძალების მუშაობისა და სითხის აღნიშნული მოცულობის ზედაპირში გადატანილი სითბოს ნაკადის ხარჯზე. გარდა ამისა, სრული ენერგიის ცვლილება შეიძლება გამოწვეული იყოს სივრცულად განაწილებულ ენერგიის წყაროების მეშვეობით . შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

A_τ – დროის dt მონაკვეთში მოცულობითი ძალების მუშაობა,

A_s – დროის dt მონაკვეთში ზედაპირული ძალების მუშაობა,

Q_s – სითბოს რაოდენობა, რომელიც გადის τ მოცულობის S ზედაპირზე დროის ერთეულში,

Q_τ – დროის ერთეულში τ მოცულობისადმი გადაცემული ენერგია სივრცულად განაწილებული ენერგიის წყაროებისაგან.

მაშინ

$$\frac{du}{dt} = \frac{dA_\tau}{dt} + \frac{dA_s}{dt} + Q_s + Q_\tau \ . \tag{3.48}$$

ვიპოვოთ A_τ, A_s, Q_s, Q_τ – მნიშვნელობები .

გამოვითვალოთ მოცულობითი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა. $d\tau$ მოცულობაში მოთავსებულ dm მასაზე მოქმედებს $\rho\vec{F}d\tau$ ძალა. dm მასის გადაადგილება dt დროში ტოლია $d\vec{r} = \vec{v}dt$ – ისა. მაშასადამე, dt დროის მონაკვეთში მოცულობითი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლი იქნება $\rho\left(\vec{F}\vec{v}\right)d\tau dt$ – ისა, ხოლო A_τ მუშაობისათვის მივიღებთ, რომ

$$A_\tau = dt\int_\tau \rho\left(\vec{F}\vec{v}\right)d\tau \ . \tag{3.49}$$

გამოვითვალოთ ზედაპირული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ზედაპირის ds ელემენტზე მოქმედებს $\overline{\sigma}_n ds$ ძალა. ამ ძალების მიერ dt დროში შესრულებული მუშაობა ტოლი იქნება $(\overline{\sigma}_n\vec{v})dsdt$ – ისა , ხოლო A_s – ისათვის მივიღებთ, რომ

$$A_s = dt\int_S (\overline{\sigma}_n\vec{v})ds \ . \tag{3.50}$$

აღვნიშნოთ $q_n^* dsdt$ – თი სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც შედის τ მოცულობაში $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ზედაპირის ds ელემენტიდან dt დრის მონაკვეთში სითბოგამტარის მეშვეობით. მაშინ $Q_s dt$ სითბოს რაოდენობა, რომელიც შედის τ მოცულობაში dt დროის მონაკვეთში სითბოგამტარობის მეშვეობით, იქნება

$$Q_s dt = dt\int_S q_n^* ds \ . \tag{3.51}$$

$\hat{q}d\tau dt$ –ით აღვნიშნოთ სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც dt დროის მონაკვეთში შედის $d\tau$ მოცულობაში სივრცულად განაწილებული წყაროებისაგან. $\hat{q}$ – სიდიდეს ენერგიის მოცულობითი შთანთქმის (გამოყოფის) სიჩქარეს უწოდებენ. $Q_\tau dt$ – არის ენერგია, რომელიც dt დროის მონაკვეთში გადაეცემა τ მოცულობას სივრცულად–განაწილებული წყაროებისაგან, და იგი ტოლია:

$$Q_\tau dt = dt\int_\tau \hat{q}d\tau\,. \tag{3.52}$$

თუ (3.49) – (3.52) გამოსახულებებს შევიტანთ (3.48) – ში, მივიღებთ რომ

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)d\tau = \int_\tau \rho\left(\vec{F}\vec{v}\right)d\tau + \int_S \left(\vec{\sigma}_n\vec{v}\right)ds + \int_\tau \hat{q}d\tau + \int_S q_n^* ds\,. \tag{3.53}$$

ჯერ გარდავქმნათ ამ განტოლების მარჯვენა მხარე.

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau(t)} \rho(x,y,z,t)\,d\tau = \int_{\partial\tau(t)} \rho(x,y,z,t)\mathrm{v}_n(x,y,z,t)\,dS + \int_{\tau(t)} \frac{\partial\rho(x,y,z,t)}{\partial t}d\tau$$

$$= \int_{\tau(t)} div(\rho\,\mathrm{v})d\tau + \int_{\tau(t)} \frac{\partial\rho(x,y,z,t)}{\partial t}d\tau$$

ფორმულის ძალით მივიღებთ, რომ:

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)d\tau = \int_\tau \left\{\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+e\right)\right\}d\tau = \int_\tau \left(\rho\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}+\rho\frac{de}{dt}\right)d\tau\,. \tag{3.54}$$

აქ გამოყენებულია უწყვეტობის განტოლება (3.3).

გარდავქმნათ ახლა ზედაპირული ინტეგრალი $\int_S \left(\vec{\sigma}_n\vec{v}\right)ds$ კოშისა და გაუსის ფორმულების გამოყენებით:

$$\int_S \left(\vec{\sigma}_n\vec{v}\right)ds = \int_S \left\{\left(\vec{\sigma}_x\vec{v}\right)\cos(\hat{n}x)+\left(\vec{\sigma}_y\vec{v}\right)\cos(\hat{n}y)+\left(\vec{\sigma}_z\vec{v}\right)\cos(\hat{n}z)\right\}ds = \int_\tau \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\sigma}_x\vec{v}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\sigma}_y\vec{v}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\sigma}_z\vec{v}\right)\right\} \tag{3.55}$$

თუ მიღებული (3.54) და (3.55)– საც გავითვალისწინებთ ენერგიის (3.53) განტოლებაში, მივიღებთ, რომ:

$$\int_\tau \left\{\rho\frac{de}{dt}+\rho\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}-\rho\left(\vec{F}\vec{v}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\sigma}_x\vec{v}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\sigma}_y\vec{v}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\sigma}_z\vec{v}\right)-\hat{q}\right\}d\tau = \int_S q_n^* ds\,. \tag{3.56}$$

შემდგომ გამარტივების მიზნით ვისარგებლოთ მოძრაობის განტოლებით ძაბვებში:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F}+\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}\,.$$

გავამრავლოთ ამ განტოლების ორივე მხარე სკალარულად $\vec{v}$ ვექტორზე და გვექნება

$$\rho\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\left(\vec{F}\vec{v}\right)+\vec{v}\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x}+\vec{v}\frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y}+\vec{v}\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}\,. \tag{3.57}$$

მაშინ (3.56) შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\int_\tau \left\{\rho\frac{de}{dt}-\vec{\sigma}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}-\vec{\sigma}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}-\vec{\sigma}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}-\hat{q}\right\}d\tau = \int_S q_n^* ds\,. \tag{3.58}$$

ეს (3.58) ტოლობა წარმოადგენს ენერგიის შენახვის კანონის ზოგად განტოლებას ინტეგრალური სახით.

§6. სითბოს ნაკადის ვექტორი

განვიხილოთ (3.58) ტოლობის მარჯვენა მხარე. განვიხილოთ ტეტრაედრი, რომლის სამი წახნაგი კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელურია. შემოვიღოთ იგივე აღნიშვნები, რომლებიც კოშის ფორმულის გამოყვანისას გვქონდა: S_x, S_y, S_z იყოს საკოორდინატო ღერძების მართობული წახნაგების ფართობებით, S_n კი იმ წახნაგის ფართობი, რომლის ნორმალია $\vec{n}$. h იყოს ტეტრაედრის სიმაღლე, რომელიც დაშვებულია S წახნაგზე. ტეტრაედრის τ მოცულობა ტოლია $\frac{1}{3}Sh$–ისა. ახლა დავწეროთ ენერგიის შენახვის კანონი ტეტრაედრისათვის (3.58) ტოლობის სახით და თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, მაშინ (3.58) მოგვცემს, რომ:

$$\frac{1}{3}Sh\left\{\rho\frac{de}{dt}-\left(\vec{\sigma}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\vec{\sigma}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\vec{\sigma}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\right)-\hat{q}\right\}_{sas}=Sq_n^{*sash}+S_xq_{-x}^{*sash}+S_yq_{-y}^{*sash}+S_zq_{-z}^{*sash} \quad . \tag{3.59}$$

აქ $S_x=S\cos(\hat{n}x)$, $S_y=S\cos(\hat{n}y)$, $S_z=S\cos(\hat{n}z)$.

თუ მიღებული (3.59) ტოლობის ორივე მხარეს შევკვეცავთ S–ზე და გადავალთ ზღვარზე $h\to 0$ მივიღებთ, რომ

$$q_n^*+q_{-x}^*\cos(\hat{n}x)+q_{-y}^*\cos(\hat{n}y)+q_{-z}^*\cos(\hat{n}z)=0\,. \tag{3.60}$$

ფიზიკური მოსაზრებებით ნათელი , რომ $q_n^*=-q_{-n}^*$, სადაც q_n^* ენერგიის ის ნაკადია, რომელიც $\vec{n}$ ნორმალიანიზედაპირში შედის, ხოლო q_{-n}^* ენერგიის ის ნაკადია, რომელიც ამ ზედაპირიდან გამოდის. ამიტომ (3.60) განტოლება მოგვცემს, რომ

$$q_n^*=q_x^*\cos(\hat{n}x)+q_y^*\cos(\hat{n}y)+q_z^*\cos(\hat{n}z)\,. \tag{3.61}$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ $\left(q_x^*,q_y^*,q_z^*\right)$ ქმნის ვექტორს, და ამ ვექტორის სითბოს ნაკადის ვექტორს უწოდებენ, რაც ასე ჩაიწერება:

$$\vec{q}^{\,*}=\vec{i}\,q_x^*+\vec{j}q_y^*+\vec{k}q_z^*\ . \tag{3.62}$$

სიდიდე q_n^* არის $\vec{q}^{\,*}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{n}$ ნორმალზე

$$q_n^*=\left(\vec{q}^{\,*}\vec{n}\right). \tag{3.63}$$

3. ენერგიის შენახვის კანონი დიფერენციალური ფორმით

გამოვიყენოთ ახლა (3.61) ფორმულა სითბური ნაკადის ვექტორთან დაკავშირებული ინტეგრალის გარდასაქმნელად.

$$\int_S q_n^*ds=\int_S\left\{q_x^*\cos(\hat{n}x)+q_y^*\cos(\hat{n}y)+q_z^*\cos(\hat{n}z)\right\}ds=\int_\tau\left(\frac{\partial q_x^*}{\partial x}+\frac{\partial q_y^*}{\partial y}+\frac{\partial q_z^*}{\partial z}\right)d\tau=\int_\tau div\vec{q}^{\,*}d\tau\ . \tag{3.64}$$

თუ (3.64)–ს შევიტანთ (3.58) ტოლობის მარჯვენა მხარეში, ენერგიის შენახვის კანონი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int_\tau\left\{\rho\frac{de}{dt}-\left(\vec{\sigma}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\vec{\sigma}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\vec{\sigma}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\right)\hat{q}-div\vec{q}^{\,*}\right\}d\tau=0\,. \tag{3.65}$$

მოცულობის ნებისმიერობის გამო (3.65)–ის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლია, ე.ი.

$$\rho\frac{de}{dt}=\vec{\sigma}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\vec{\sigma}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\vec{\sigma}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}+\hat{q}+div\vec{q}^{\,*}\,. \tag{3.66}$$

ეს განტოლება წარმოადგენს ენერგიის შენახვის კანონის ჩაწერის დიფერენციალური სახით.

იდეალური აირისათვის მუდმივი სითბოტევადობის შემთხვევაში შინაგანი ენერგიის ცვლილება ასე გამოისახება:

$$de = C_\tau dT \ , \tag{3.69}$$

სადაც C_τ არის კუთრი სითბოტევადობაა მუდმივი მოცულობის დროს. ამიტომ ამ შემთხვევაში (3.66) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\rho C_\tau \frac{dT}{dt} = \vec{\sigma}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{\sigma}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{\sigma}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \hat{q} + div\vec{q}^{\,*} . \tag{3.70}$$

უკუმშველი სითხისათვის

$$de = cdT \ . \tag{3.71}$$

სადაც C სითბოტევადობაა, ამიტომ უკუმშველი სითხისათვის (3.66) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\sigma}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{\sigma}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{\sigma}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \hat{q} + div\vec{q}^{\,*} . \tag{3.72}$$

ლექცია 7
თავი მეოთხე

<u>თხევადი გარემოს უმარტივესი მოდელები</u>

ჰიდროდინამიკის განტოლებათა სისტემა შედგება უწყვეტობის, სითხის მოძრაობისა და ენერგიის გადატანის განტოლებებისაგან. იგულისხმება, რომ სითხის მოძრაობის რაოდენობის შინაგანი მომენტი ნულის ტოლია, ხოლო მოცულობითი და ზედაპირული წყვილი ძალები არა გვაქვს. ამ შემთხვევაში ჰიდროდინამიკის განტოლებათა სისტემა აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0 \, ,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} + \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \, ,$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{\sigma}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{\sigma}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{\sigma}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \hat{q} + div\vec{q}^{\,*} .$$

განტოლებათა ამ სისტემაში შემავალი $\vec{F}$ და $\hat{q}$ სიდიდეები, როგორც წესი, ცნობილად ითვლება. ჩვეულებრივ, გარე მოცულობით ძალად სიმძიმის ძალას იღებენ, ე.ი. $\vec{F} = \vec{g}$, ხოლო სივცობრივ–განაწილებული ენერგიის წყაროებს ნულად თვლიან, ე.ი. $\hat{q} = 0$. შინაგანი ენერგიის გამოსახულებაც ცნობილია ფიზიკიდან: $e = e(p,T)$. მიუხედავად ჩამოთვლილისა, $\rho, \vec{v}, \sigma_{ik}, \vec{q}^{\,*}$ უცნობ ფუნქციათა რაოდენობა, რომლებიც ჰიდროდინამიკის განტოლებათა სისტემაში შედის, მეტია, ვიდრე განტოლებათა რაოდენობა. მაშასადამე, განტოლებათა მოცემული სისტემა ჩაკეტილი არ არის.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ჰიდროდინამიკის ზემოთმოყვანილი განტოლებათა სისტემა სამართლიანია ნებისმიერი სითხისათვის (აირისათვის) ზემოაღნიშნულ შეზღუდვაში და მას არავითარი ინფორმაცია არ გააჩნია განსახილველი სითხის თვისებების შესახებ. სითხის კონკრეტულმა თვისებებმა თავი უნდა იჩინოს ძაბვის ტენზორის და სითბური ნაკადის ვექტორის გამოსახულებებში. ძაბვის ტენზორისა და სითბური ნაკადის ვექტორის გამოსახულებები კი მიღებულ უნდა იქნან, მაგალითად, ექსპერიმენტული მონაცემების განზოგადების შედეგად. კერძოდ, ისეთი სითხეებისა და აირებისათვის, როგორიცაა წყალი და ჰაერი, ძაბვის ტენზორისა და სითბური ნაკადის ვექტორის გამოსახულებანი და აგრეთვე მათში შემავალი კოეფიციენტების დამოუკიდებულებანი წნევის ტემპერატურაზე კარგად არის

ცნობილი. ზევრი სითხის და აირისათვის ძაბვის ტენზორის და სითბური ნაკადის ვექტორის გამოსახულებანი ანალოგიურია. თუმცა არსებობს ისეთი სითხეები და აირები, რომლისათვისაც მსგავსი გამოსახულებანი სამართლიანი აღარ არის.

მოცემულ თავში ჩვენ განვიხილავთ ძაბვის ტენზორის და სითბური ნაკადის ვექტორის ისეთ გამოსახულებებს, რომლებიც მეტად არის გამოყენებული ჰიდროდინამიკაში. ამ გამოსახულებებში შედის წნევა და ტემპერატურა. ამიტომ ჰიდროდინამიკის განტოლებათა ზემოაღნიშნულ სისტემას უნდა დაემატოს ე.წ. მდგომარეობის განტოლება, რომელიც ამყარებს კავშირს სიმკვრივის, ტემპერატურისა და წნევის შორის.

§1. იდეალური სითხე და მისი ძაბვის ტენზორი

სითხეს ეწოდება იდეალური, თუ $\vec{\sigma}_n$ ძაბვის ვექტორი, რომელიც მოქმედებს $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ფართზე, ამ ფართის მართობულია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იდეალურ სითხეში გვაქვს მხოლოდ ნორმალური ძაბვებით, მხები ძაბვები კი ნულის ტოლია.

ვაჩვენოთ, რომ იდეალურ სითხეში $\vec{\sigma}_n$ ვექტორის სიდიდე არ არის დამოკიდებული იმ ფართის ორიენტაციაზე, რომლებზედაც მოქმედებს ძაბვა. თუ გავიხსენებთ კოშის ფორმულას

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cos(\hat{n}x) + \vec{\sigma}_y \cos(\hat{n}y) + \vec{\sigma}_z \cos(\hat{n}z). \tag{4.1}$$

და აგრეთვე იმას, რომ იდეალურ სითხეში

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n}\sigma_n; \;\; \vec{\sigma}_x = \vec{i}\,\sigma_{xx}; \;\; \vec{\sigma}_y = \vec{j}\,\sigma_{yy}; \;\; \vec{\sigma}_z = \vec{k}\sigma_{zz}. \tag{4.2}$$

მაშინ კოშის ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\vec{n}\sigma_n = \vec{i}\,\sigma_{xx} \cos(\hat{n}x) + \vec{j}\,\sigma_{yy} \cos(\hat{n}y) + \vec{k}\sigma_{zz} \cos(\hat{n}z). \tag{4.3}$$

მაგრამ რადგანაც

$$\vec{n} = \vec{i} \cos(\hat{n}x) + \vec{j} \cos(\hat{n}y) + \vec{k} \cos(\hat{n}z). \tag{4.4}$$

მივიღებთ, რომ

$$\sigma_n = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}. \tag{4.5}$$

ამ ტოლობაში შემავალ სიდიდეთა მნიშვნელობა $(-p)$–ით აღვნიშნოთ, ე.ი.

$$\sigma_n = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p. \tag{4.6}$$

ამ p სიდიდეს წნევაეწოდება. ნიშანი კი გვიჩვენებს, რომ იდეალურ სითხეში ადგილი აქვს კუმშვას და არა გაფართოებას, რადგან ეს უკანასკნელი გამოიწვევდა უწყვეტი გარემოს წყვეტას. თუ (4.6)–ს შევიტანთ (4.2)–ში მივიღებთ

$$\vec{\sigma}_n = -p\vec{n}, \quad \vec{\sigma}_x = -\vec{i}p, \quad \vec{\sigma}_y = -\vec{j}p, \quad \vec{\sigma}_z = -\vec{k}p. \tag{4.7}$$

ამგვარად, იდეალურ სითხეში ძაბვის ტენზორს აქვს სახე

$$\|\sigma_{ik}\| = \begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix} = -p\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = -p\delta_{ik}, \tag{4.8}$$

სადაც δ_{ik} კრონეკელის სიმბოლოა.

§2. იდეალურ სითხის მოძრაობის განტოლებები

თუ ძაბვის ტენზორის კომპონენტების (4.7) გამოსახულებებს შევიტანთ ძაბვებში მოცემულ მოძრაობის განტოლებებში, მაშინ (3.35) ასე გადაიწერება

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\left(\vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\,grasdp\,. \qquad (4.9)$$

ან გეგმილებში:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\,, \\ &\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\,, \\ &\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\,, \end{aligned} \qquad (4.10)$$

(4.9) ან (4.10) განტოლებებს იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლებები, ან ეილერის განტოლებები ეწოდება. თუ ვისარგებლებთ ტენზორული აღნიშვნებით, ეილერის განტოლებები ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad i,k = 1,2,3.$$

თუ ეილერის განტოლებებს დავუმატებთ უწყვეტობის განტოლებას

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\rho + \rho div\vec{v} = 0\,. \qquad (4.11)$$

ანდა გეგმილებში

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0\,. \qquad (4.12)$$

და ვიგულისხმებთ, რომ სითხე ბაროტროპულია, ე.ი. მდგომარეობის განტოლებას აქვს სახე

$$\rho = f(p), \qquad (4.13)$$

მაშინ (4.9), (4.11), (4.13) განტოლებები ჩაკეტილ სისტემას შექმნიან $\vec{v}, F, t, p, \rho$ ხუთი უცნობისათვის.

თუ სითხე ბაროკლინურია, მაშინ უწყვეტობის უწყვეტობის, მდგომარეობის და ეილერის განტოლებებს უნდა დაემატოს ენერგიის შენახვის განტოლებაც. მართლაც, განვიხილოთ სითბოგაუმტარი სითხე, მაშინ $\vec{q}^{\,*} = 0$ და ენერგიის (3.66) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\rho\frac{de}{dt} = \vec{\sigma}_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{\sigma}_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{\sigma}_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \hat{q}\,. \qquad (4.14)$$

თუ სითხე იდეალურია, მაშინ ძაბვის ტენზორის კომპონენტები (4.7)–ით გამოისახება და

$$\vec{\sigma}_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{\sigma}_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{\sigma}_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = -p\left(\vec{i}\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right) = -p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -pdiv\vec{v}\,. \qquad (4.15)$$

ამიტომ (4.14) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\rho\frac{de}{dt} = -pdiv\vec{v} + \hat{q}\,. \qquad (4.16)$$

ბაროკლინური სითხის მდგომარეობის განტოლება ასეთია:

$$f(p,\rho,T) = 0$$

ამრიგად, ბაროკლინური სითხის მოძრაობის ძირითადი განტოლებებია:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0 \quad \text{– უწყვეტობის განტოლება,}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp \text{ – მოძრაობის განტოლება,}$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \hat{q} - pdiv\vec{v} \text{ – ენერგიის განტოლება,}$$

$$f(p, \rho, T) = 0 \text{ – მდგომარეობის განტოლება.}$$

ისინი ქმნიან ექვს განტოლებიან სისტემას ექვსი $\vec{v}, p, \rho, T$ უცნობისათვის, რადგანაც მოცულობითი ძალა $\vec{F}$, შინაგანი ენერგია e და ენერგიის მოცულობითი შთანთქმა $\hat{q}$ –მოცულობად ითვლება. ამ განტოლებებიდან ხუთი განტოლება პირველი რიგის კერძო წარმოებულებიანი არაწრფივი განტოლებაა, ხოლო ერთი სასრული თანაფარდობაა. ამ სისტემით აღიწერება იდეალური სითბოგაუმტარი სითხის ყველა შესაძლო მოძრაობა.

თუ სითხე უკუმშველია და ერგვაროვანი, მაშინ $\rho = const$ და იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$div\vec{v} = 0, \tag{4.19}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp,$$

ე.ი. გვექნება ოთხი განტოლება $\vec{v}, p, \rho, F$ ოთხი უცნობისათვის.

§3. მოძრაობის განტოლებები ლემბ–გრომეკოს ფორმით

თუ გავიხსენებთ ვექტორული ანალიზის ფორმულას

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = grad\frac{v^2}{2} + [rot\vec{v} \cdot \vec{v}]. \tag{4.20}$$

და შემოვიღებთ გრიგალის ვექტორს ფორმულით

$$\overline{\Omega} = 2\vec{\omega} = rot\vec{v}, \tag{4.21}$$

მაშინ ეილერის განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + grad\frac{v^2}{2} + [\overline{\Omega} \cdot \vec{v}] = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp. \tag{4.22}$$

(4.22) განტოლებას იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლება ეწოდება ლემბ–გრომეკოს სახით.

თუ სითხე ბაროტროპულია, ე.ი. $\rho = f(p)$, მაშინ შეიძლება შემოტანილ იქნეს წნევის ფუნქცია

$$\phi = \int \frac{dP}{\rho}. \tag{4.23}$$

და ადგილი ექნება ტოლობას

$$grad\phi = \frac{1}{\rho} gradp. \tag{4.24}$$

მაშინ ლემბ–გრომეკოს განტოლება ასე გადაიწერება

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + grad\left(\frac{v^2}{2} + \phi\right) + [\vec{\Omega} \cdot \vec{v}] = \vec{F}. \tag{4.25}$$

ხოლო თუ მოცულობითი ძალები პოტენციალურია, ე.ი.

$$\vec{F} = -gradu, \tag{4.26}$$

მაშინ საბოლოოდ მოძრაობის განტოლება ლემბ–გრომეკოს სახით იქნება

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + grad\left(\frac{v^2}{2} + \phi + u\right) + [\vec{\Omega} \cdot \vec{v}] = 0. \tag{4.27}$$

მიღებულ განტოლებას ეილერის განტოლებასთან შედარებით მთელი რიგი უპირატესობანი აქვს:

ა. ცალკეა გამოყოფილი ინერციის ძალების წმინდა გრიგალური ნაწილი – $\left[\vec{\Omega}\cdot\vec{v}\right]$,

ბ. $\frac{v^2}{2}+\phi+u$ – გამოსახულების მექანიკური აზრი ნათელია. იგი მოძრავი ნაწილაკის ენერგიაა.

გ. ამ განტოლებიდან უფრო ნათლად ჩანს ინტეგრების სხვადასხვა შემთხვევები, ვიდრე ეილერის განტოლებიდან.

ლექცია 8

§4. იდეალური არასითბოგამტარი სითხის სტაციონარული დინების ამოცანათა დასმა

განმარტების თანახმად, დინებას ეწოდება სტაციონარული, თუ ნებისმიერი ჰიდროდინამიკური A სიდიდისათვის დროით კერძო წარმოებული

$$\frac{\partial A}{\partial t}=0\,;$$

მაშინ (4.25) სისტემა შეიძლება ასე გადაიწეროს

$$v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho div\vec{v}=0\,,$$

$$v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}gradp\,,$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial e}{\partial x}+v_y\frac{\partial e}{\partial y}+v_z\frac{\partial e}{\partial z}\right)+pdiv\vec{v}=\hat{q}\,,$$

$$f(p,\rho,T)=0\,,$$

სადაც $e=e(p,T),\vec{F}$ და $\hat{q}$ ცნობილად ითვლებიან, ხოლო საძებნი $\rho, v_x, v_y, v_z, p, T$ ფუნქციები x, y, z ცვლადების ფუნქციებია.

განვიხილოთ სასაზღვრო პირობები, რომლებიც საძებნმა ფუნქციებმა უნდა დააკმაყოფილონ.

1. <u>სასაზღვრო პირობები სხეულის ზედაპირზე</u>

ვთქვათ, სითხის სტაციონარული ნაკადი მოძრაობის სხეულის მიმართ, ხოლო კოორდინატთა სისტემა უძრავად არის დაკავშირებული სხეულთან. სხეულის ზედაპირი S-ით აღვნიშნოთ და $\vec{n}$-ით ზედაპირის ნორმალი. მაშინ შეიძლება გვქონდეს ორი შემთხვევა

ა. სხეული სითხეგაუმტარია. მაშინ სიჩქარის ნორმალური მდგენელი საზღვარზე ნულის ტოლი უნდა იყოს

$$V_n|_s=0.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სითხე გარს ედინება სითხეს.

ბ. სხეულის ზედაპირი სითხეს ატარებს. ამ დროს სითხის ნაკადი ზედაპირში ამ ზედაპირის წერტილების მოცემული ფუნქციაა

$$V_n|_s=f(M).$$

თუ სითხეში რამდენიმე ერთმანეთის მიმართ უძრავი სხეულია, მაშინ სასაზღვრო პირობები უნდა შესრულდეს თითოეული მათგანის ზედაპირზე.

2. <u>პირობები სითხეების გამყოფ ზედაპირზე</u>

ვთქვათ, $\sum$ გამყოფთ ზედაპირია, მაშინ სტაციონარული მოძრაობის დროს ეს ზედაპირი უძრავი იქნება. სითხე მოძრაობის ამ ზედაპირის გასწვრივ და ვერ შეაღწევს მასში. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$V_n^I|_{\sum} = V_n^{II}|_{\sum} = 0 .$$

არსებობს აგრეთვე პირობა, რომელიც ეხება წნევას გამყოფ ზედაპირზე. და ასე გამოისახება

$$p^I|_{\sum} = p^{II}|_{\sum}$$

ზედაპირის ფორმა მოიძებნება ამოცანის პირობიდან.

3. პირობები უსასრულობაში

ვთქვათ სხეულს გარსედინება სითხის ნაკადი, რომლის სიჩქარე უსასრულობაში ერთგვაროვანია. ამ შემთხვევაში ცნობილი უნდა იყოს, რომ

$$\vec{V}|_{\infty} = \vec{V}_{\infty}, \quad p|_{\infty} = p_{\infty}, \quad T|_{\infty} = T_{\infty} .$$

მდგომარეობის განტოლება ერთმანეთთან p, ρ, T სიდიდეებს აკავშირებს. ამიტომ საკმარისია მოცემული იყოს ამ სიდიდეებიდან მხოლოდ ორი მათგანი.

§6.იდეალური არასითბოგამტარი სითხის არასტაციონარული დინების ამოცანათა დასმა

სითხის არასტაციონარული დინების შემთხვევაში ჰიდროდინამიკური ფუნქციები დამოკიდებული არიან კოორდინატებსა და დროზე. განტოლებათა სისტემა, რომელიც მათ უნდა დააკმაყოფილონ არის (4.10).

1.სასაზღვრო პირობები მოძრავი სხეულის ზედაპირზე

არასტაციონარული დინებისას სხეული შეიძლება მოძრაობდეს სითხეში და შეიძლება თავისი ფორმაც შეიცვალოს. როგორც ადრე, S იყოს გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირი, $\vec{n}$ ზედაპირის ნორმალი; სითხის სიჩქარე იყოს $\vec{v}$, ხოლო $\vec{u}(m,t)$-ზედაპირის წერტილის სიჩქარე t დროის მომენტში.

ა. თუ S ზედაპირი სითხეს არ ატარებს, მაშინ

$$V_n|_S = u_n(M,t). \tag{4.28}$$

ბ. თუ ზედაპირი სითხეგამტარია

$$V_n|_S = f(M,t). \tag{4.29}$$

სადაც $f(m,t)$-მოცემული ფუნქციაა.

2. სასაზღვრო პირობები გამყოფ ზედაპირზე

ამ შემთხვევაში გამყოფი ზედაპირი შეიძლება ფორმას იცვლიდეს, გადაადგილდეს დროის მიხედით. ვთქვათ, $\vec{u}^{\sum}$ არის $\sum$ ზედაპირის წერტილთა სიჩქარე, მაშინ სასზღვრო პირობები ასე ჩაიწერება

$$V_n^I|_{\sum} = V_n^{II}|_{\sum} = u_n^{\sum}, \quad p^I|_{\sum} = p^{II}|_{\sum} \tag{4.30}$$

3.პირობები უსასრულობაში კი ასე:

$$\vec{V}|_{\infty} = \vec{V}_{\infty}(t), \quad p|_{\infty} = p_{\infty}(t), \quad T|_{\infty} = T_{\infty}(t). \tag{4.31}$$

4. საწყისი პირობები|

არასტაციონარული ამოცანების დროს მოძრაობა დამოკიდებულია იმ მდგომარეობაზე, საიდანაც დაიწყო მოძრაობა. ამიტომ, გარდა სასაზღვრო პირობებისა, მოცემული უნდა იყოს საწყის $t = t_0$ მომენტში პირობები, რომლებიც ახასიათებენ სითხის მდგომარეობას მთელ იმ არეში, რომელიც სითხეს უკავია

$$\vec{V}|_{t=t_0} = \vec{V}_0(x,y,z), \quad P|_{t=t_0} = p_0(x,y,z), \quad T|_{t=t_0} = T(x,y,z). \tag{4.32}$$

ამრიგად, ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ვიპოვოთ ისეთი v_x, v_y, v_z, p, T ფუნქციები, რომლებიც (4.25) სისტემის ამონახსნებია, საწყის t_0 მომენტში გვაძლევენ (4.32)-ს, ხოლო დროის ყოველ მომენტში აკმაყოფილებენ (4.28) ან (4.29) სასაზღვრო პირობებს სხეულის ზედაპირზე, გამყოფ ზედაპირზე, თუ ის არსებობს, (4.30) პირობებს და (4.31) პირობებს უსასრულობაში.

საწყის მომენტში გამყოფი ზედაპირის $\sum_0$ საზღვარი მოცემული უნდა იყოს. $\sum$ ზედაპირის ფორმა მოიძებნება ამოცანის ამოხსნის პროცესში $\sum(t)|_{t=t_0} = \sum_0$ საწყისი პირობით.

საწყისი და სასაზღვო პირობები უნდა იყვნენ შეთანხმებულნი, ე.ი. საწყისში პირობებმა უნდა დააკმაყოფილოს პირობები უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებსა და გარსმოდენად სხეულის ზედაპირზე.

გარდა განხილული სასაზღვრო პირობებისა გვხვდება სხვა შემთხვევები, რომლებსაც განიხილავენ სხვადასხვა ამოცანათა დასმის დროს.

§7. სითხე, რომლებიც ემორჩილება ფურიეს სითბოგამტარობის კანონს

იზოტროპული გარემოსათვის ფურიეს სითბოგამტარობის კანონი შემდეგში მდგომარეობს: $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ds ფართში dt დროის მონაკვეთში სითბოგამტარობის მეშვეობით გასული სითბოს რაოდენობა dq^* პროპორციულია $dsdt$ და ტემპერატურის ნორმალური წარმოებულის ნამრავლისა

$$dq* = k\frac{\partial T}{\partial n}dSdt, \tag{4.33}$$

ხოლო სითბური ნაკადისათვის ფურიეს კანონი მოგვცემს, რომ

$$q_n^* = \frac{dq^*}{dsdt} = k\frac{\partial T}{\partial n}. \tag{4.34}$$

პროპორციულობის k კოეფიციენტს სითბოგამტარობის კოეფიციენტი ეწოდება.

ენერგიის განტოლების გამოყვანისას ნაჩვენები იყო, რომ q_n^* არის სითბოს ნაკადის გეგმილი ნორმალზე, ე.ი. $q_n^* = (\vec{q}^*\vec{n})$. გარდა ამისა, $\frac{\partial T}{\partial n} = (\vec{n} gradT)$. ამიტომ (4.34) ტოლფასია თანაფარდობის

$$\vec{q}^* = kgradT. \tag{4.35}$$

(4.34) და (4.35) წარმოადგენენ ფურიეს სითბოგამტარობის კანონის მათემატიკურ ჩაწერას.

სითბოგამტარობის k კოეფიციენტი ძირითადად ტემპერატურაზეა დამოკიდებული და სხვადასხვა სითხისათვის სხვადსხვაა. სითხეების მექანიკაში შემოყავთ P_z-პრანდტლის რიცხვი:

$$P_z = \frac{\mu C_p}{k}, \tag{4.36}$$

სადაც μ-სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტია, C_p კი-ხვედრითი სითბოტევადობა მუდმივი წნევის დროს. ზოგიერთი სითხისათვის სითბოგამტარობის k კოეფიციენტი წრფივად არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე:

$$k = k_0 + \alpha(T - T_0). \tag{4.37}$$

თუ სითხე არაიზოტროპულია, მაშინ k სკალარული სითბოგამტარობის ნაცვლად შემოჰყავთ სითბოგამტარობის ტენზორი.

ლექცია 9

§8. ბლანტი სითხე და მისი ძაბვის ტენზორი. ნიუტონისეული სითხეები

სითხეს ეწოდება ბლანტი, თუ მასში მოძრაობის დროს გარდა ნორმალური ძაბვებისა, შეიმჩნევა მხები ძაბვებიც.

ვთქვათ, ორ ფირფიტას შორის მოთავსებულია სითხე. ქვედა ფირფიტა უძრავი იყოს, ხოლო ზედა მოძრაობდეს ქვედა ფირფიტის პარალელურად $\vec{v}_0$ სიჩქარით. ფირფიტებს შორის მანძილი h-ით აღვნიშნოთ. ცდა გვიჩვენებს, რომ ძალა, რომელიც მოძრაობაში მოსაყვანად უნდა მოვდოთ ზედა ფირფიტას, ტოლია

$$\vec{f} = \mu \frac{\vec{v}_i}{h} S , \tag{4.38}$$

სადაც S-ფირფიტის ფართობია. ერთეულოვან ფართზე მოსული ძალა, ანუ მხები ძაბვა ტოლი იქნება

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{v_0}{h} , \tag{4.39}$$

სადაც μ-სითხის თვისებებზე დამოკიდებული მუდმივია, v_0 კი ზედა ფირფიტის მოძრაობის სიჩქარე.

ეს ცდა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ სითხის მოძრაობის სიჩქარე. ქვედა ფირფიტაზე სითხის სიჩქარე ნულის ტოლია, ზედაზე კი - ფირფიტის სიჩქარისა. სითხის სიჩქარის განაწილება წრფივად არის დამოკიდებული მანძილზე

$$v_x = v_0 \frac{y}{h} . \tag{4.40}$$

სადაც v_x სითხის სიჩქარეა. აქედან ცანს, რომ $\frac{dv_x}{dy} = \frac{v_0}{h}$ და თუ მას გავითვალისწინებთ (4.39) ფორმულაში, მივიღებთ, რომ

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} . \tag{4.41}$$

μ კოეფიციენტს სითხის სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი ეწოდება. მისი განზომილებაა $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$.

სითხეში სიბლანტის, ანუ მხები ძაბვების წარმოშობის მიზეზი მოლეკულების ქაოტური მოძრაობაა. მოლეკულები გადასვლა სითხის ერთი ფენიდან მეორეში იწვევს მოძრავი ფენების დამუხრუჭებას ერთმანეთის მიმართ.

რადგანაც განსახილველ შემთხვევაში სითხის სიჩქარე y ცვლადის ფუნქციაა, ამიტომ დეფორმაციის სიჩქარის $\dot{e}_{ik}$ ტენზორი მიიღებს სახეს:

$$\dot{e}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy} , \tag{4.42}$$

ხოლო მხები ძაბვისათვის გვექნება:

$$\sigma_{xy} = 2\mu \, \dot{e}_{xy} . \tag{4.43}$$

მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევს, დავამყაროთ კავშირი ძაბვის ტენზორისა და დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორს შორის ზოგად შემთხვევაში

სითხეს ეწოდება ნიუტონისეული, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. სითხეში, როდესაც იგი მოძრაობს როგორც აბსოლუტურად მყარი სხეული ან უძრავია, ძაბვის მხოლოდ ნორმალური მდგენლები განსხვავდება ნულისაგან;

2. ძაბვის ტენზორის კომპონენტები დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტების წრფივი ფუნქციებია და რომ ამ ფუნქციების კოეფიციენტები არ არიან დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე;

3. სითხე იზოტროპულია, ე.ი. მისი თვისებები ყველა მიმართულებით ერთნაირია.

ამ პირობებიდან პირველი პირობა იმას ნიშნავს, რომ $\sigma_{ik}=0$, როცა $i \neq k$, თუ ყველა $\dot{e}_{ij}=0$. მეორე პირობა ნიშნავს იმას, რომ σ_{ik} ძაბვა შეიძლება გამოსახულ იქნას $\dot{e}_{ik}$-ს საშუალებით (მხედველობაში უნდა მივიღოთ ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობა), ასეთი წარმოდგენა ბლანტი სითხის სივრცული მოძრაობის დროს ნიუტონის განზოგადოებული კანონით გამოისახება და მას შემდეგი სახე აქვს:

$$\sigma_{ik}=a\,\dot{e}_{ik}+b\delta_{ik}\,, \tag{4.44}$$

სადაც a და b სიდიდეები სკალარებია, δ_{ik} კი-კრონეკელის სიმბოლო. რადგანსც ეს ფორმულა კერძო შემთხვევაში (4.62)-ს უნდა დაემთხვეს. ამიტომ

$$a=2\mu\,. \tag{4.45}$$

თუ სითხე უძრავია, მაშინ $\sigma_{ik}=b\delta_{ik}$ ეს იმას ნიშნავს, რომ ასეთ სითხეში მხოლოდ ნორმალური ძაბვები გვაქვს, რომლებიც ტოლია ერთმანეთისა, სითხის იზოტროპიულობის გამო. რადგანაც სიბლანტე მხოლოდ მოძრაობის დროს წარმოიქმნება, ბუნებრივია, რომ დაძაბული მდგომარეობა უძრავ ბლანტ სითხეში ისეთივე უნდა იყოს როგორიც უძრავ იდეალურ სითხეში, ე.ი. თითოეულ ფართზე ნორმალური მიმართულებით უნდა მოქმედებდეს ჰიდროსტატიკური p წნევა. წნევის მნიშვნელობა გამოისახება σ_{ik} ტენზორის პირველი ინვარიანტის საშუალებით:

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=-3p$$

თუ ამ თანაფარდობას განვაზოგადებთ, ამით განვსაზღვრავთ წნევასაც მოძრავ ბლანტ სითხეში

$$p=-\frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)+\xi div\vec{v}\,.$$

(4.44) ტოლობა იმას ნიშნავს, რომ ტოლია მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების ტენზორთა ინვარიანტები. თუ წრფივ ინვარიანტებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, მივიღებთ, რომ

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=2\mu div\vec{v}+3b$$

აქედან კი

$$b=\frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)-\frac{2}{3}\mu div\vec{v}\,.$$

გამოვსახოთ ახლა b კოეფიციენტი წნევის საშუალებით, და გვექნება

$$b=-p+\left(\xi-\frac{2}{3}\mu\right)div\vec{v}$$

საბოლოოდ (4.44) ტოლობა მოგვცემს ბლანტი სითხის შემდეგ კანონს:

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+2\mu\,\dot{e}_{ik}+\left(\xi-\frac{2}{3}\mu\right)div\vec{v}\,\delta_{ik}\,. \tag{4.46}$$

ეს კანონი ჩამოყალიბებულ იქნა ნავიეს მიერ (1843 წ), ხოლო სტოქსის მიერ (1845 წ).

μ კოეფიციენტს სიბლანტის მეორე კოეფიციენტს უწოდებენ. სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი სითხის ფენებს შორის ხახუნს ახასიათებს მათი ფარდობითი მოძრაობის დროს, ხოლო ξ კოეფიციენტი-მოცულობით სიბლანტეს, რომელიც მხოლოდ კუმშვად სითხეში მჟღავნდება.

μ და ξ კოეფიციენტი ყოველთვის დადებითია და მოცემული სითხისათვის ისინი ან მუდმივნი არიან, ან ტემპერატურაზე არიან დამოკიდებული. 20^0 ტემპერატურაზე წყლისათვის $\mu=0{,}01$ გ/სმ წმ, ხოლო ჰაერისათვის $1{,}8\cdot10^{-4}$ მ/სმ.წმ

გარდა დინამიკური კოეფიციენტისა ჰიდროდინამიკაში სარგებლობენ სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტით:

$\upsilon = \mu / \rho$,

რომლის განზომილებაა $[\upsilon] = L^2 T^{-1}$, ხოლო მისი მნიშვნელობა წყლისათვის ტოლია 0,01სმ ^{2} წმ $^{-1}$ -სა, ჰაერისათვის კი-0,15 სმ ^{2} წმ $^{-1}$ -ისა.

შემდგომში საჭირო იქნება ძაბვის ტენზორის გამოსახვა დეკარტეს ორთოგონალურ კოორდინატებში. ამიტომ მოვიყვანთ მის სახეს:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda div\vec{v} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda div\vec{v} \ ,$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda div\vec{v} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda div\vec{v} \ ,$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda div\vec{v} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda div\vec{v} \ ,$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

აქ შემოტანილია აღნიშვნები $v_x = u, v_y = v, v_z = w, \lambda = \xi - \frac{2}{3}\mu$. (4.46) გამოსახულება ასეც შეიძლება გადავწეროთ

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu\, \dot{e}_{ik} + \lambda\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \tag{4.47}$$

სადაც

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = div\vec{v} \ . \tag{4.48}$$

ამრიგად, სითხეებს, რომლებისათვისაც ძაბვის ტენზორის კომპონენტებსა და დეფორმაციის სიჩქარის კომპონენტებს შორის არსებობს (4.46) დამოკიდებულება, ანდა კომპონენტებში-(4.47) სახის დამოკიდებულება, ნიუტონისეულ სითხეებს უწოდებენ.

§9. ბლანტი სითხის მოძრაობის ძირითადი განტოლება

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ბლანტ სითხეს, რომლისთვისაც კავშირი ძაბვის ტენზორის კომპონენტებსა და დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებს შორის (4.46) თანაფარდობით გამოისახება. დავუშვათ აგრეთვე რომ სითხე ემორჩილება ფურიეს სითბოგამტარობის კანონს და არ გააჩნია შინაგანი მომენტი. მაშინ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონი ავტომატურად სრულდება, რადგან $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ ბლანტი სითხის ჰიდრომექანიკის ზოგადი განტოლებების მისაღებად უმჯობესია უწყვეტობის, მოძრაობის და ენერგიის განტოლებები ტენზორული სახით ამოვწეროთ. მათ ექნებათ შემდეგი სახე:

უწყვეტობის განტოლებას–

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{4.49}$$

მოძრაობის განტოლებას ძაბვებში:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{4.50}$$

ენერგიის განტოლებას

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \hat{q} + \frac{\partial q_e^*}{\partial x_e}, \tag{4.51}$$

ხოლო კავშირი ძაბვის ტენზორსა და დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორს შორის გამოისახება (4.46) ფორმულით:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu\, \dot{e}_{ik} + \lambda \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e}, \tag{4.52}$$

სადაც

$$\dot{e}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \tag{4.53}$$

თუ (4,52)-ს და (4.53) –ს შევიტანთ (4.50) ში მივიღებთ რომ:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \delta_{ik} \frac{\partial P}{\partial x_k} + 2\frac{\partial \mu \dot{e}_{ik}}{\partial x_k} + \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial k_k}\left(\lambda \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right) \tag{4.54}$$

ახლა თუ ვისარგებლებთ δ_{ik} ფილტრაციის თვისებითა და S_{ik} მნიშვნელობებით, გვექნება:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right) \tag{4.55}$$

ეს არის ბლანტი სითხის მოძრაობის ზოგადი განტოლება.

თუ გავიხსენებთ ფურიეს სითბოგამტარობის კანონს

$$\vec{q}^{\,*} = kgradT \tag{4.56}$$

მდგომარეობის განტოლებას

$$f(\rho, p, T) = 0 \tag{4.57}$$

და რომ შინაგანი ენერგია e, სიბლანტის კოეფიციენტები μ, λ და სითბოგამტარობის კოეფიციენტი k წნევისა და ტემპერატურის ფუნქციებია:

$$e = e(p,T),\ \ \mu = \mu(p,T),\ \ \lambda = \lambda(p,T), \quad k = k(p,T) \tag{4.58}$$

და რომ მოცულობითი ძალა $\widehat{F}$ და $\widehat{q}$ ფუნქციის სახე ცნობილია, მაშინ (4.49), (4.51), (14.55), (4.56), (4.57) განტოლებები წარმოადგენენ ბლანტი სითბოგამტარი სითხის ჰიდ-რომექანიკის ძირითად განტოლებებს. ამ განტოლებებში უცნობებია $\rho, \vec{V}, p, T, \vec{q}^{\,*}$, ე.ი. ცხრა სკალარული სიდიდე. განტოლებათა რიცხვიც არის ცხრა: უწყვეტობის განტოლე-ბა–ერთი, ენერგიის განტოლება–ერთი,მოძრაობის განტოლება–სამი, ფურიეს კანონი–3, და მდგომარეობის განტოლება–ერთი. თუ (4.56)–ის დახმარებით განვიხილავთ $\vec{q}^{\,*}$, მა-შინ მივიღებთ ექვს განტოლებას ექვსი $v_{x,}v_y, v_z, \rho, p, T$, უცნობით. (4.56) მდგომარეობის განტოლება საშუალებას გვაძლევს ერთ–ერთი თერმოდინამიკური ფუნქცია დანარჩენი ორის საშუალებით გამოვსახოთ, მაშინ საბოლოოდ დაგვრჩება ხუთი განტოლება ხუთი უცნობით. თუ სიბლანტის კოეფიციენტები სითხეში მცირედ იცვლებიან, მაშინ ისინი შეიძლება მუდმივებათ. ჩავთვალოთ და მოძრაობის (4.55) განტოლება გავამარტივოთ.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ მუნჯი ინდექსი შეიძლება ნებისმიერი ინდექსით შევცვალოთ, (4.55) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2{}_k}+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\ v_k}{\partial x\ {}_k}+\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=\rho F_i-\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2{}_k}+(\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\ v_k}{\partial x\ {}_k}.$$

თუ გავიხსენებთ რომ $\lambda=\rho-\frac{2}{3}\mu$, მივიღებთ რომ:

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\rho F_i-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2{}_k}+\left(\rho+\frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \tag{4.59}$$

რაც ვექტორულად ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\left[\frac{d\vec{v}}{dt}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right]=\rho\vec{F}-\mathrm{grad}p+\mu\Delta\vec{v}+\left(\rho+\frac{\mu}{3}\right)\mathrm{graddiv}\vec{v} \tag{4.60}$$

(4.60) განტოლებას ნავიე–სტოქსის განტოლება ეწოდება. ენერგიის (4.51) განტოლება, თუ მასში შევიტანთ (4.52) ,(4.53) და (4.56) განტოლებებს ასეთ სახეს მივიღებთ:

$$\begin{gathered}\rho\frac{de}{dt}=\hat{q}-p\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\lambda\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_e}{\partial x_e}+\frac{\partial}{\partial x_e}k\frac{\partial T}{\partial x_e}=\\ \hat{q}-p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\lambda\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x_e}k\frac{\partial T}{\partial x_e},\end{gathered} \tag{4.61}$$

ანუ

$$\rho\frac{de}{dt}=\hat{q}-pdiv\vec{v}+\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\lambda(div\vec{v})^2+divkgradT. \tag{4.62}$$

§10 . ერთგვაროვანი უკუმშველი ბლანტი სითხის ჰიდრომექანიკის განტოლებათა სისტემა

განვიხილოთ ერთგვაროვანი უკუმშველი ბლანტი სითხე. მისთვის $\rho=const$ წარმოადგენს მდგომარეობის განტოლებას. ვიგულისხმოთ, რომ სიბლანტის μ კოეფიციენტი და სითბოგამტარობის k კოეფიციენტი მუდმივი სიდიდეებია:

$$\mu=const,\ k=konst. \tag{4.63}$$

რადგან $\rho=const$, ამიტომ $\frac{d\rho}{dt}=0$ და უწყვეტობის განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$div\vec{v}=0, \tag{4.64}$$

ხოლო ძაბვის ტენზორს უკუმშველი სითხის შემთხვევაში ასეთი სახე ექნება:

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+2\mu\dot{e}_{ik}=-p\delta_{ik}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{4.65}$$

(4.64)–ის გათვალისწინებით (4.60) განტოლება მოგვცემს, რომ:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p+\nu\Delta\vec{v}, \tag{4.66}$$

სადაც $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტია.

(4.66) განტოლებას ბლანტი უკუმშველი სითხის მოძრაობის განტოლება ეწოდება. უწყვეტობის (4.56) და მოძრაობის (4.66) განტოლებები ქმნიან 4 განტოლებიან სისტემას,

ოთხი $v_x, v_y, v_{z,} p$ უცნობით. თუ $\mu = const$ მაშინ ეს განტოლებები დამოკიდებული არიან ენერგიის განტოლებაზე. იმის შემდეგ, რაც ვიპოვით $\vec{v}$ და p ფუნქციებს, ტემპერატურა ენერგიის განტოლებიდან უნდა განისაზღვროს.

ეილერის განტოლებისაგან განსხვავებით, ნავიე–სტოქსის განტოლებები მეორე რიგის წარმოებულებს შეიცავენ, ეს კი გავლენას ახდენს სასაზღვრო პირობებზე.

განვიხილოთ ახლა ენერგიის განტოლება.

რადგანაც სითხე უკუმშველია, ამიტომ (4.64) განტოლების ძალით ენერგიის განტოლების ძალით ენერგიის (4.61) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\rho \frac{de}{dt} = \hat{q} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + div(kgradT), \tag{4.67}$$

სადაც გამოსახულება $\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ გაშლილი სახით ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] =$$

$$2\mu \left\{ \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\} = \tag{4.68}$$

$$\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 = \phi$$

ϕ ფუნქციას დისიპაციის ფუნქციას უწოდებენ. თუ (4.67) განტოლებას შევიტანთ (4.68) ის მნიშვნელობას და გავითვალისწინებთ რომ k=const, მივიღებთ რომ:

$$\rho \frac{de}{dt} = \hat{q} + \phi + k\Delta T \tag{4.69}$$

უკუმშველი სითხისათვის შინაგანი ენერგია $e = cT + const$, სადაც C სითხის სითბოტევადობაა, ამიტომ (4.69) განტოლება მოგვცემს, რომ:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \hat{q} + \phi + k\Delta T \tag{4.70}$$

თუ (4.64), (4.66) განტოლებათა სისტემა ამოხსნილია მაშინ ტემპერატურისთვის მივიღებთ (4.70) განტოლება, რომელიც მეორე რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებაა. მასში შემავალი დისიპაციის ϕ ფუნქცია უარყოფითი სიდიდე არაა და ნულად იქცევა მხოლოდ მაშინ, როცა სითხე ან უძრავია, ანდა მოძრაობს, როგორც აბსოლუტურად მყარი სხეული იდეალური სითხისათვის ϕ=0, რადგან $\mu = 0$.

თუ სითხე უძრავია, მაშინ $v_x = v_y = v_z = 0$ და ϕ=0. ენერგიის განტოლება ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებს:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \hat{q} + k\Delta T \tag{4.71}$$

თუ სითბოგამტარობის კოეფიციენტი k=k(t), მაშინ ენერგიის (4.71) განტოლება ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \hat{q} + div(gradT) \tag{4.72}$$

ამრიგად (4.64), (4.66), (4.70) განტოლებები ქმნიან ბლანტი უკუმშველი სითხის ჰიდრომექანიკის ძირითად განტოლებათა სისტემას.ეს განტოლებებია:

$$div\vec{v}=0,$$
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p+\upsilon\Delta\vec{v},$$
$$c\rho\left[\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)T\right]=\hat{q}+\phi+k\Delta T, \tag{4.73}$$

სადაც ϕ–ს აქვს (4.68)–ის სახე. (4.73) სისტემა შეიცავს ხუთ განტოლებას ხუთი $v_x, v_y, v_{z,} p, T$ უცნობით აქაც $\vec{F}$ და q მიჩნეულია ცნობილ სიდიდეებათ.

§11. ბლანტი სითბოგამტარი სითხის სტაციონალური დინების ამოცანათა დასმა

იმისათვის, რომ (4.73) სისტემის ამონახსნი ერთადერთი იყოს აუცილებელია მოცემული გვქონდეს საწყისი და სასაზღვრო პირობები. განვიხილოთ სამი ტიპის სასაზღვრო პირობა: გარსმოდენად სხეულზე, ორი სითხის გამყოფ ძედაპირზე და უსასრულობაში.

თუ დინება სტაციონალურია,მაშინ ნებისმიერი ჰიდროდინამიკური ფუნქციისათვის
$$\frac{\partial f}{\partial t}=0 \quad \text{და} \quad \frac{\partial f}{\partial t}=v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

1. სასაზღვრო პირობა გარსმოდენად სხეულზე

სტაციონალური დინებისას სხეულები უძრავნი არიან და გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირის წერტილთა სიჩქარეები ნულის ტოლია, ე.ი. $\vec{u}$. ამიტომ სითხის გაუმტარი სხეულის ზედაპირზე სითხის ნაწილაკთა სიჩქარე უნდა იყოს ნულის ტოლი:
$$\vec{v}\big|_s=0,\Rightarrow v_n\,|_s=0, v_\tau\,|_s=0$$

თუ ზედაპირი სითხეს ატარებს, მაშინ $\vec{v}\,|_s=\vec{f}(M)$ სადაც $\vec{f}(M)$ მოცემული ფუნქციაა. გარდა სიჩქარის პირობისა, ისმება აგრეთვე პირობა ტემპერატურისთვის რომელიც ორი სახის შეიძლება იყოს: მოცემულია ამ სითხის ტემპერატურა სხეულის ზედაპირზე
$$T\,|_s=T_w(M)\,, \tag{4.74}$$
ანდა სითბოს ის ნაკადი,რომელიც სხეულიდან სითხეს გადაეცემა
$$k\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s=q(M) \tag{4.75}$$
თუ k_{ii}– სხეულის სითბოგამტარობაა, ხოლო T_{ii}– ტემპერატურა, მაშინ ეს პირობა ასე ჩაიწერება:
$$k\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s=k_{ii}\frac{\partial T_{ii}}{\partial n}\bigg|_s \tag{4.76}$$
ეს პირობა სითხის ნაკადის უწყვეტობას გამოსახავს .

2. პირობები გამყოფ ზედაპირზე.

თუ ორი სითხის გამყოფი ზედაპირი უძრავია, მაშინ:
$$\vec{v}^{\,I}\Big|_\Sigma=\vec{v}^{\,II}\Big|_\Sigma. \tag{4.77}$$

ეს არის სიჩქარის უწყვეტობის პირობა გამყოფ ზედაპირზე გადასვლისას ე.ი ბლანტ სითხეში უნდა იყოს ტოლი სითხის არამარტო ნორმალური, არამედ მხები მდგენელებიც.

თუ $\vec{n}$ Σ ზედაპირზე მდებარე ფართის ნორმალია,მაშინ პირობას ძაბვისათვის ასეთი სახე ექნება:

$$\vec{\sigma}_n{}^{I}\Big|_{\Sigma} = \vec{\sigma}_n{}^{II}\Big|_{\Sigma} \tag{4.78}$$

ასევე უნდა გვქონდეს პირობა ტემპერატურისათვის

$$k_1 \frac{\partial T^{I}}{\partial n}\Bigg|_{\Sigma} = k_2 \frac{\partial T^{II}}{\partial n}\Bigg|_{\Sigma} \tag{4.79}$$

3. პირობები უსასრულობაში.

ისინი ასეთია:

$$\vec{v}\big|_{\infty} = \vec{v}_{\infty}, \quad p\big|_{\infty} = p_{\infty}, \quad T\big|_{\infty} = T_{\infty} \tag{4.80}$$

ამრიგად, ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ვიპოვოთ (4.73) სისტემის ამონახსნები, რომლებიც ზემოთ ჩამოთვლილ პირობებს აკმაყოფილებენ.

§12. არასტაციონალური დინების ამოცანათა დასმა

1. სასაზღვრო პირობები სხეულის ზედაპირზე.

არასტაციონალური მოძრაობის დროს სხეულებს შეუძლია როგორც სითხეში მოძრაობა ისე თავიანთი ფორმის შეცვლა, ვთქვათ, $\vec{u}(M,t)$ სხეულის ზედაპირის M წერტილის სიჩქარეა დროის t მომენტში. მაშინ ზედაპირში სითხის გაუმტარი სხეულისათვის გვექნება:

$$\vec{v}\big|_{s} = \vec{u}(M,t), \tag{4.81}$$

ხოლო ზედაპირში სითხის გამტარი სხეულისათვის კი

$$\vec{v}\big|_{s} = \vec{f}(M,t), \tag{4.82}$$

სადაც $\vec{f}(M,t)$ მოცემული ფუნქციაა.

ტემპერატურისთვისაც იგივე პირობები გვექნება,რომლებიც (4.75) , (4.76) ფორმულებით გამოისახება. ოღონდ მარჯვენა მხარეში შემავალი ფუნქციები გარდა M წერტილის კოორდინატისა, t დროზეც იქნებიან დამოკიდებულნი, ე.ი

$$\mathrm{T}\,|_{\mathrm{s}} = \mathrm{T_w(M)},\ \mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{n}}\bigg|_{\mathrm{s}} = \mathrm{q(M,t)}. \tag{4.83}$$

2. სასაზღვრო პირობები გამყოფ ზედაპირზე

სასაზღვრო პირობები ორი სითხის გამყოფ ზედაპირზე ინარჩუნებენ იმავე სახეს, რაც (4.78)–(4.80) ფორმულებშია, მაგრამ ახლა t დროზე იქნება დამოკიდებული არა მარტო $\vec{v},\vec{\sigma}_n,T$, არამედ თვით Σ ზედაპირზეც.

3. პირობები უსასრულობაში

უსასრულობაში უნდა იყოს ცნობილი $\vec{v}_{\infty}(t)$, $\mathrm{p}_{\infty}(t)$ და $T_{\infty}(t)$.

4. საწყისი პირობები

საწყის $t = t_0$ მომენტში მოცემული უნდა იყოს:

$$\vec{v}\big|_{t=t_0} = \vec{v}_0(x,y,z), \quad p\big|_{t=t_0} = p_0(x,y,t), \quad T\big|_{t=t_0} = T_0(x,y,t).$$

ლექცია 10
თავი მეხუთე

ჰიდროსტატისტიკა

განვიხილოთ უძრავი სითხე. ამ შემთხვევაში სითხეში მხოლოდ ნორმალური ძაზვებია ნულისაგან განსხვავებული და მათი სიდიდე დამოკიდებულია არა ფართის ორიენტაციაზე, ამიტომ ამ შემთხვევაში ძაზვის ტენზორს ასეთი სახე აქვს:

$$\|\sigma_{ik}\| = -p\delta_{ik} ,$$

რის გამოც სითხის წონასწორობის ამოცანებისათვის მნიშვნელობა არ აქვს სითხე იდეალურია თუ ბლანტი და უნდა ჩავთვალოთ, რომ უამრავი სითხისათვის სამართლიანია ფურიეს სითბოგამტარობის კანონი

$$\vec{q}^{\,*} = kgradT$$

ჰიდრომექანიკის იმ ნაწილს, რომელიც სითბოსა და აირის წონასწორობის პირობებს სწავლობს, ჰიდროსტატისტიკა ეწოდება.

§1.წონასწორობის განტოლებები

ამოვიწეროთ ჰიდრომექანიკის განტოლებათა სისტემა ზოგად შემთხვევაში:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0 \tag{5.1}$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} \tag{5.2}$$

$$\rho\frac{de}{dt} = \vec{\sigma}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \vec{\sigma}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \vec{\sigma}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} + div\vec{q}^{\,*} + \hat{q}, \tag{5.3}$$

$$p = f(\rho, T). \tag{5.4}$$

სითხე წონასწორობაშია ეს იმას ნიშნავს, რომ $\vec{v}=0$ და $\frac{\partial}{\partial t} = 0.$ ამიტომ ნებისმიერი f ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}gradf \equiv 0 \tag{5.5}$$

(5.5) ის გათვალისწინებით უწყვეტობის (5.1) განტოლება იგივურად კმაყოფილდება ხოლო მოძრაობის რაოდენობის (5.2) კანონი, იმის გამო, რომ $\vec{\sigma}_x = -\vec{i}p, \vec{\sigma}_y = -\vec{j}p, \vec{\sigma}_z = -\vec{k}p,$ მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\rho\vec{F} = gradp \tag{5.6}$$

ენერიის (5.3) განტოლება მოგვცემს, რომ

$$div\vec{q}^{\,*} + \hat{q} = 0 \tag{5.7}$$

(5.4), (5.6), (5.7) განტოლებები სითხის წონასწორობის ანუ ჰიდროსტატისტიკის განტოლებებს წარმოადგენენ.

დავუშვათ რომ სითბოს მოცულობითი წყაროები არ გვაქვს, ე.ი $\hat{q} = 0$, და თუ გავითვალისწინებთ ფურიეს სითბოგამტარობის კანონს, რომლის თანახმადაც

$$\vec{q}^{\,*} = kgradT , \tag{5.8}$$

სადაც $k = k(\rho, T)$, მივიღებთ წონასწორობის განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\rho\vec{F} = gradp\,, \tag{5.9}$$
$$div(kgradT) = 0 \tag{5.10}$$
$$p = f(\rho, T). \tag{5.11}$$

სითხის წონასწორობის (5.9)–(5.11) განტოლებათა სისტემა ხუთი განტოლებისაგან შედგება და შეიცავს სამ უცნობს. ეს უცნობებია: ρ, p, T. ეს კი იმას ნიშნავს რომ წონასწორობა ყოველთვის არ არის შესაძლებლი. ამიტომ (5.9)–(5.11) სისტემისათვის უნდა ვიპოვოთ ამოხსნადობის პირობები.

რადგან წონასწორობაში $\vec{v}$ =0, ამიტომ $\frac{d\rho}{dt} + \vec{v}grad\rho + \rho div\vec{v} = 0$ უწყვეტობის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{d\rho}{dt}$=0 რაც იმას ნიშნავს, რომ არჩეულ კოორდინატთა სისტემაში სიმკვრივის ველი სტაციონალურია, ე.ი $\rho = \rho$ (x,y,z). თუ სითხეზე მოქმედი გარე მოცულობითი ძალა $\vec{F} = 0$, მაშინ (5.9) განტოლებიდან მივიღებთ რომ

$$gradp = 0 \tag{5.12}$$

ესე იგი სითხის ყველა წერტილში წნევა ერთნაირია:

$$p = const \tag{5.13}$$

რაც პასკალის კანონს გამოხატავს.

§2. პირობები გარე ძალებზე

(5.9) განტოლებიდან ჩანს, რომ სითხის წონასწორობის პირობებში გარე მოცულობითი ძალების $\vec{F}$ ველი არ შეიძლება ნებისმიერი იყოს. იმის გამოსარკვევად თუ რა შეზღუდვები ედება მოცულობით ძლებს (5.9) ტოლობის ორივე მხარეში ავიღოთ ოპერაცია როტორი, მივიღებთ:

$$rot\ gradp = rot\rho\vec{F}$$

თუ გავითვალისწინებთ რომ $rotgradp = 0$ ხოლო

$$rot\rho\vec{F} = \rho rot\vec{F} + [grad\rho\vec{F}]$$

გვექნება:

$$\rho rot\vec{F} + [grad\rho\vec{F}] = 0 \tag{5.14}$$

აქედან კი $\vec{F}$ –ზე სკალარულად გამრავლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\vec{F}\rho\ rot\vec{F} = 0 \tag{5.15}$$

(5.15) წარმოადგენს აუცილებელ პირობას, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს მოცულობითი ძალები, რომ სითხე იყოს წონასწორობაში.

თუ სითხე უკუმშვადია და ერთგვაროვანი მაშინ $\rho = const$ და (5.14) იდან ჩანს რომ

$$rot\vec{F} = 0$$

ესეიგი ამ შემთხვევაში გარე ძალებს გააჩნიათ პოტენციალი

$$\vec{F} = -gradu\,.$$

ამრიგად, უკუმშველ ერთგვაროვან სითხეს შეუძლია იმყოფებოდეს წონასწორობაში მხოლოდ მაშინ, თუ გარე მოცულობითი ძალები პოტენციალურია. ვიპოვოთ ამ პოტენციალის მნიშვნელობა.

თუ $\rho = \rho_0 = const,$ მაშინ (5.9) განტოლება მოგვცემს

$$\vec{F} = grad\,\frac{p}{\rho_0},$$

ე.ი მოცულობითი ძალის u პოტენციალი ტოლია $\left(-\frac{p}{\rho_0} + const\right)$–ისა. აქედან $p = const - \rho_0 u$. ინტეგრების მუდმივი მოიძებნება პირობიდან: $p\big|_{u=u_0} = p_0$ ამრიგად წნევა ნაპოვნია.

§3.სითხის წონასწორობა სიმძიმის ძალა ველში

განვიხილოთ ახლა სითხის წონასწორობა სიმძიმის ძალა ველში. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Oz ღერძი მიმართული იყო ვერტიკალურად ზევით, მაშინ

$$F_x = F_y = 0 \quad F_z = -g,$$

ე.ი

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

აქედან კი

$$dp = \rho F_z = -\rho g dz, \qquad /5.16/$$

რომელიც ინტეგრების შემდეგ მოგვცემს

$$p = p_0 - \int_{z_0}^{z} \rho g d\alpha.. \qquad (5.17)$$

(5.16)–დან ჩანს, რომ $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

და იმის გამო, რომ ρ >0, g >0, აქედან გამომდინარეობს $\frac{\partial p}{\partial z}$<0, ე.ი წნევა სიმაღლის გაზრდით მცირდება.

(5.17) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ წნევათა სხვაობა ორ წერტილში, რომლებიც z და z_0 სხვადასხვა სიმაღლეზე მდებარეობენ ტოლია $\int_{z_0}^{z} \rho g d\alpha.$ ინტეგრალისა, ე.ი. სითხის სვეტის წონისა, რომლის ფუძის ფართობი ერთია, სიმაღლე კი $z - z_0$. აქ g და ρ სიდიდეები z ცვლადის ფუნქციებია.

თუ სითხე უკუმშველია და ერთგვაროვანია, მაშინ $\rho = \rho_0 = const$ და (5.17) განტოლება მოგვცემს:

$$p = p_0 - \rho_0 g(z - z_0), \qquad (5.18)$$

ე.ი. წნევა ერთგვაროვან უკუმშველ სითხეში სიმაღლის მიხედვით წრფივი კანონით იცვლება.თუ დავუშვებთ, რომ $z_0 = 0$ ე.ი p_0 არის წნევა $z = 0$ სიბრტყეში, მაშინ (5.18)–დან მივიღებთ:

$$p = p_0 – \rho\rho g = p_0 + \rho gh,$$

სადაც h არის სითხის სიღრმე $z = 0$ სიბრტყის მიმართ. (5.18) და (5.19) ფორმულები საშულაებას გვაძლევს გამოვითვალოთ წნევა სითხით სავსე ჭურჭლის ფსკერზე და რომ ამ წნევის მნიშვნელობა მხოლოდ სიღრმეზე იქნება დამოკიდებული.

§4. ბაროტროპული სითხის წონასწორობა

როგორც ვიცით, სითხეს ეწოდება ბაროტროპული, თუ მისი სიმკვრივე მხოლოდ წნევის ფუნქციაა

$$\rho = f(p) \qquad (5.20)$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში სითხეს ბაროკლინური ეწოდება.

თუ სითხე ბაროტროპულია, მაშინ წონასწორბის (5.9) განტოლება ასე შეიძლება გადაიწეროს

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} gradp = \frac{gradp}{f(p)} \qquad (5.21)$$

შემოვიღოთ წნევის ფუნქცია

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} \qquad (5.22)$$

მაშინ ადვილი საჩვენებელლია,რომ

$$gradP = \frac{1}{f(p)} gradp \qquad (5.23)$$

და (5.21) განტოლება მოგვცემს:

$$\vec{F} = gradP,$$

ე.ი გარე მოცულობითი ძალა პოტენციალურია

$$\vec{F} = -gradU .$$

მაშასადამე, ბაროტროპული სითხე წონასწორობაშია, თუ მასზე მოქმედი მოცულობითი ძალა პოტენციალურია, ხოლო თუ გავითვალისწინებთ (5.24) განტოლებას, მივიღებთ, რომ

$$grad(P + U) = 0,$$

საიდანაც

$$P + U = const = c . \qquad (5.25)$$

ინტეგრების c მუდმივი განისაზღვრება პირობიდან $P|_{u=u_0} = P_0$

თუ სითხე იმყოფება მუდმივი ტემპერატურის ქვეშ (პროცესი იზოთერმულია) და $T = T_0 = const = c$, მაშინ წონასწორობის განტოლება ტემპერატურისათვის იგივურად კმაყოფილდება, ხოლო მდგომარეობის განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\rho = \phi(p, T_0) = f(p),$$

ე.ი იზოთერმული პროცესის დროს სიმკვრივე მხოლოდ წნევის ფუნქციაა. მაშასადამე, სითხე ბაროტროპულია.

§5. სრულყოფილი გაზის წონასწორობა სიმძიმის ველში

განვიხილოტ შემთხვევა, როცა აირი ემორჩილება კლაპეირონის განტოლებას

$$p = R\rho T \qquad (5.26)$$

წნევის სრული დიფერენციალისათვის სიმძიმის ძალთა ველში გვაქვს

$$dp = -\rho g dz \quad , \qquad (5.27)$$

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}} = -\frac{gdz}{RT(z)},$$

$$p = p_0 \exp(-\int_{z_0}^{z} \frac{g d\alpha}{RT(\alpha)}) \qquad (5.28)$$

(5.28) ფორმულას ბარომეტრულ ფორმულას უწოდებენ. თუ ვიცით ტემპერატურა როგორც სიმაღლის ფუნქცია, მაშინ (5.28) ფორმულით ვიპოვით წნევის ცვლილებას სიმაღლის მიხედვით.

თუ პროცესი იზოთერმულია , მაშინ $T = T_0 = const$ და კლაპეიდონის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$p = R\rho T_0$$

და (5.26) განტოლება მოგვცემს, რომ

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{g}{RT}(z - z_0)\right] \ . \qquad (5.29)$$

ე.ი. წნევა სიმაღლის მიხედვით ექსპონენციალური კანონით ეცემა.

§6. პირობები გამყოფ ზედაპირზე

განვიხილოთ წნევის ცვლილება ρ_1 და ρ_2 სიმკვრივის მქონე ორი უკუმშველი არა შერევადი სითხის გამყოფი ზედაპირის მცირე გადაადგილებისას.

რადგანაც გამყოფ ზედაპირზე წნევაც და მოცულობითი ძალები ერთნაირია ორივე სითხისათვის, ამიტომ თუ წონასწორობის განტოლებას გავამრავლებთ გადაადგილების $d\vec{z}$ ვექტორზე, მივიღებთ რომ

$$dp = \rho_1(\vec{F}d\vec{z}) = \rho_2(\vec{F}d\vec{z}).$$

აქედან რადგანაც $\rho_1 \neq \rho_2$, გვექნება

$$\vec{F}d\vec{z} = 0$$

ე.ი

$$dp = 0$$

ამრიგად, გამყოფ ზდაპირზე წნევა მუდმივია, ე.ი. გამყოფი ზედაპირი იზობარული ზედაპირია. აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ორი შემხები წონადი სითხის გამყოფი ზედაპირი წონასწორობის დროს ჰორიზონტალური სიბრტყეა.

§7. მყარი სხეულის ზედაპირზე მოქმედი წნევების განმსაზღვრელი ფორმულები

მოცემული მოცულობითი ძალის შემთხვევაში წნევა წერტილის კოორდინატების ცნობილი ფუნქციაა,რომელიც რომელიც წონასწორობისა და მდგომარეობის განტო–ლე ბებისგან განისაზღვრება.

თუ სითხე უკუმშველი და ერთგვაროვანია, მაშინ მდგომარეობის განტოლებას ასეთი სახე აქვს: $\rho = const$, ხოლო კუმშვადი სითხისათვის მდგომარეობის განტოლება კლაპეირონის განტოლებაა:

$$p = R\rho T \ .$$

აქ სითხის ტემპერატურა წერტილის კოორდინატების მოცემული ფუნქციაა. როდესაც სითხეში ჩაძირული სხეულის ზედაპირზე მოქმედი ქნევის განსაზღვრაა საჭირო, იგულისხმება, რომ წონასწორობის პროცესი იზოთერმულია.

ჰიდროდინამიკურ ძალთა ერთობლიობა, რომელიც მოდებულია რაიმე მყარი სხეულის S ზედაპირზე, როგორც ეს მყარი სხეულის სტატიკიდანაა ცნობილი, დაიყვანება ძალთა ნაკრეებ ვექტორზე

$$\vec{P} = \int_S \vec{\sigma}_n dS \tag{5.30}$$

და წყვილ ძალაზე მომენტით–

$$\vec{L} = \int_S [\vec{z}\,\vec{\sigma}_n] dS. \tag{5.31}$$

(5.30) და (5.31) ტოლობები გეგმილებში მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$\begin{aligned} P_x &= \int_S p\cos(nx)dS, & L_x &= \int_S p[y\cos(nz) - z\cos(ny)]dS, \\ P_y &= \int_S p\cos(ny)dS, & L_y &= \int_S p[z\cos(nx) - x\cos(nz)]dS, \\ P_z &= \int_S p\cos(nz)dS, & L_z &= \int_S p[x\cos(ny) - y\cos(nx)]dS, \end{aligned} \tag{5.32}$$

სადაც $\vec{n}$ არის S ზედაპირის გარე ნორმალი სითხის მიმართ. ხოლო $\vec{\sigma}_n$ შეცვლილია მისი ტოლი სიდიდით $\vec{\sigma}_n = p\vec{n}$.

ლექცია 11
თავი მეექვსე

იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლებების ინტეგრალები

იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლებების ინტეგრება ზოგად შემთხვევაში არ ხერხდება, მაგრამ არსებობს კერძო შემთხვევები, როდესაც ამ განტოლებების ინტეგრალების პოვნა შეიძლება.

§1. ბერნულის ინტეგრალი

განვიხილოთ იდეალური ბაროტროპული სითხის სტაციონალური მოძრაობა, როდესაც მოცულობით ძალებს პოტენციალი გააჩნიათ, მაშინ:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 - \text{სტაციონარული მოძრაობის გამო,}$$

$$\rho = f(p) - \text{სითხის ბაროტროპულობის გამო,}$$

$$\vec{\mathrm{F}} = \text{-gradU - მოცულობითი ძალების პოტენციურობის გამო.}$$

ამ დაშვებებში ლემბ–გრომეკის (4.27) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს.

$$grad(\frac{v^2}{2} + P + U) = [\vec{v}\ \Omega]$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ სკალარულად ელემენტარულ გადაადგილებაზე $d\vec{r} = \vec{v}dt$ დენის წირის გასწვრივ, მივიღებთ რომ:

$$d(\frac{v^2}{2} + P + U) = 0$$

სადაც დიფერენციალი აღებულია დენის წირის გასწვრივ, ამიტომ

$$\frac{v^2}{2} + P + U = C \tag{6.1}$$

აქ C მუდმივია მოცემული დენის წირის გასწვრივ და მისი მნიშვნელობა იცვლება ერთი დენის წირიდან მეორეზე გადასვლისას.

მიღებულ თანაფარდობას ბერნულის ინტეგრალს უწოდებენ. იგი იდეალური სითხის განტოლებათა პირველ ინტეგრალს წარმოადგენს. მისი ფიზიკური არსი იმაში მდგომარეობს, რომ დენის წირის გასწვრივ სრული მექანიკური ენერგია მუდმივია. თუ სითხე უკუმშველი და არაერთგვაროვანია მოცულობითი ძალა სიმძიმის ძალაა, ე.ი სითხე წონადია, ამიტომ

$$P_x = \frac{p}{\rho}, \quad U = gz$$

და ბერნულის ინტეგრალი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = c \tag{6.2}$$

ანუ

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = c_1 \tag{6.3}$$

აქ g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა და z ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზევით.

(6.3) გამოსახულებაში z გეომეტრიული სიმაღლეა ე.ი სიმაღლე, რომელიც აქვს თხევად ნაწილაკს მოცემულ დენის მილაკში რაიმე ჰორიზონტალური სიბრტყის მიმართ, $\frac{v^2}{2g}$ კი ის სიმაღლეა, რომელსაც მიაღწევს მატერიალური წერტილი სიცარიელეში, თუ მას ავისვრით ვერტიკალურად ზევით საწყისი v სიჩქარით. მას სიჩქარულ სიმაღლეს უწოდებენ. $\frac{p}{\rho g}$ კი წარმოადგენს სითხის სვეტის სიმაღლეს. რომელიც უნდა ჰქონდეს უძრავ სითხეს, რომ სვეტის ფუძეში მივიღოთ P წნევა. ამ სიმაღლეს პიეზომეტრულ სიმაღლეს უწოდებენ. ამრიგად, უკუმშველი ერთგვაროვანი წონადი სითხის სტაციონალური მოძრაობისას გეომეტრიულ, სიჩქარულ და პიეზომეტრულ სიმაღლეთა ჯამი მუდმივია დენის წირის გასწვრივ.

§2. კოშის ინტეგრალი

განვიხილოთ იდეალური ბაროტროპული სითხე, რომელიც მოთავსებულია პოტენციური მოცულობითი ძალების ველში და დინება უგრიგალოა, მაშინ:

$\rho = p(t) -$ სითხის ბაროტროპულობის გამო,

$rot\vec{v} = \vec{\Omega} = 0 -$ უგრიგალო დინების გამო,

$\vec{\mathrm{F}} = \text{-gradU} -$ მოცულობითი ძალების პოტენციურობის გამო.

ამ დაშვებებში (4.27) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+P+U\right)=0 \tag{6.6}$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ უგრიგალო მოძრაობის დროს სიჩქარის ვექტორს გააჩნია პოტენციალი

$$\vec{v} = grad\varphi = \nabla\varphi$$

რადგანაც რაიმე ფუნქციის გრადიენტი დამოკიდებულია x, y, z, t ცვლადებზე, ამიტომ (6.6) ინტეგრება მოგვცემს, რომ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+P+U = A(t), \tag{6.7}$$

სადაც $A(t)$ დროის ნებისმიერი ფუნქციაა სითხის მოძრაობის მთელ არეში. ამ ინტეგრალს კოშის ინტეგრალს უწოდებენ.

თუ სითხეზე სიმძიმის ძალა მოქმედებს, მაშინ $U = gz$ და კოშის ინტეგრალი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+P+gz = A(t) \tag{6.8}$$

უკუმშველი ერთგვაროვანი სითხისათვის გვექნება $P=\frac{P}{\rho}$, ამის გამო კი მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz = A(t) \tag{6.9}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ (6.8) ინტეგრალს უნდა მიემატოს უწყვეტობისა და მდგომარეობის განტოლებები, მაშინ მივიღებთ სამ განტოლებათა სისტემას სამი φ, P, ρ უცნობის განსაზღვრისათვის ეს სისტემა გვექნება:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+P+gz=A(t), \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div(\rho grad\varphi)=0, \tag{6.11}$$

$$\rho=f(p) \tag{6.12}$$

თუ სითხე უკუმშველი და ერთგვაროვანია , მაშინ (6.11) და (6.12) განტოლებები საკმაოდ მარტივდებიან და ასეთ სახეს იღებენ:

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi=0,\\&\rho=const.\end{aligned} \tag{6.13}$$

ამრიგად უკუმშველი ერთგვაროვანი სითხის უგრიგალო მოძრაობის დროს ამოცანა დაიყვანება ერთი φ ფუნქციის განსაზღვრაზე, რომელიც საწყის და სასაზღვრო პირობებში ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებს. ჰიდროდინამიკური წნევა კი კოშის (6.9) ინტეგრალიდან განისაზღვრება. რაც შეეხება $A(t)$ ფუნქციის სახეს იგი დადგინდება თუ წინასწარ გვეცოდინება წნევის დამოკიდებულება t დროზე მოძრაობის არის რომელიმე ერთ წერტილში.

§3. სტაციონარული უგრიგალო მოძრაობა. ბერნულ ეილერის ინტეგრალი

თუ ბაროტროპული სითხის უგრიგალო მოძრაობა პოტენციურ მოცულობითი ძალების ველში სტაციონარულია. ე.ი. $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, მაშინ (6.7) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+P+U=B, \tag{6.14}$$

სადაც ნებისმიერი $A(t)$ ფუნქცია ნებისმიერი B მუდმივის მნიშვნლობას იღებს.

თუ სითხე უკუმშველი და ერთგვაროვანია, მოცულობით, მოცულობითი ძალა კი სიმძიმის ძალაა, მაშინ (6.14) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+P+gz=B \tag{6.15}$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ მის მარცხენა მხარეში მდგომი გამოსახულება

$$\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+P+gz$$

ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას სითხის მოძრაობის მთელ არეში. ამ ინტეგრალს ბერნულ–ეილერის ინტეგრალს უწოდებენ.

თუ აირი ადიაბატურია, მაშინ $P=\frac{\partial}{\partial-1}\frac{P}{\rho}$ და ბერნულ–ეილერის ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+\frac{\partial}{\partial-1}\frac{P}{\rho}+U=B. \tag{6.16}$$

ლექცია 12
თავი 7

იდეალური სითხის განზოგადებული ერთგანზომილებიანი მოძრაობები

ამ თავში განხილული იქნება ბაროტროპული სითხის მოძრაობა მილში, რომლის განივკვეთის ფართობი მცირედ იცვლება მილის ღერძის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში შეიძლება აგებულ იქნეს აღნიშნული ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი იმის დაშვებით, რომ სიჩქარის v_x მდგენელი მილის კვეთში მცირედ იცვლება, ხოლო აჩქარების $\dfrac{dv_y}{dt}$ და $\dfrac{dv_z}{dt}$ განივი მდგენელები მცირეა.

$ 1. განტოლებათ სისტემა.

დავუშვათ, რომ სითხე ბაროტროპულია და მოცულობითი ძალები უგულვებელყოფილია, მაშინ მოძრაობის განტოლებათა სისტემას ექნება სახე

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{7.1}$$

$$\frac{dv_y}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{7.2}$$

$$\frac{dv_z}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\, div\,\vec{v}=0, \tag{7.4}$$

$$\rho=\Phi(p). \tag{7.5}$$

თუ ჩავთვლით, რომ აჩქარების $\dfrac{dv_y}{dt}$ და $\dfrac{dv_z}{dt}$ განივი მდგენელები მცირენი არიან $\dfrac{dv_x}{dt}$-თან შედარებით, ე.ი. თუ მათი უგულვებელყოფა შეიძლება, მაშინ (7.2), (7.3) და (7.5) განტოლებები მოგვცემენ, რომ წნევა და სიმკვრივე მხოლოდ x და t ცვლადების ფუნქციებია:

$$p=p(x,t), \quad \rho=\rho(x,t). \tag{7.6}$$

დავუშვათ აგრეთვე, რომ

$$v_x=v_x(x,t), \tag{7.7}$$

მაშინ სისტემა (7.1)-(7.5) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\, div\,\vec{v}=0, \tag{7.9}$$

$$\rho=\Phi(p). \tag{7.10}$$

ამ სისტემაში სამი განტოლებაა და ხუთი უცნობი. (7.9) ისე გარდავქმნათ, რომ მასში აღარ შევიდეს v_y და v_z უცნობები. ამისათვის ვაინტეგროთ (7.9) განტოლება მილის განივი F კვეთით, მივიღებთ

$$\iint_F \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] ds = 0, \qquad (7.11)$$

ამ ტოლობის პირველი სამი შესაკრები არ არის დამოკიდებული y და z ცვლადებზე, ამიტომ (7.11) ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) F + \iint_F \left[\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] ds = 0, \qquad (7.12)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.6) და შემოვიღებთ განივი სიჩქარის ვექტორს $\vec{u} = \vec{j} v_y + \vec{k} v_z$, მივიღებთ, რომ

$$\iint_F \rho \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] ds = \rho \iint_F div \vec{u} ds = \rho \oint_l u_n dl. \qquad (7.13)$$

ნაწილაკთა გადაადგილება Δt დროში შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც Ox ღერძის გასწვრივ $\Delta x = v_x t$ მანძილზე გადაადგილებისა და განივ სიბრტყეში $\vec{u}\Delta t$ მანძილზე გადაადგილებების ჯამი. l კონტურის ნაწილაკები გადავლენ ახალ l_1 კონტურში. მანძილი l-დან l_1-მდე ნორმალის გასწვრივ იქნება $\Delta n = u_n \Delta t$. ფართობის ცვლილება კი ტოლი იქნება

$$\Delta F \cong \oint_l \Delta n dl = \Delta t \int_l u_n dl$$

ანუ

$$\int_l u_n dl = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{dF}{dt}. \qquad (7.14)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.13) და (7.14) განტოლებებს, (7.12) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) F + \rho \frac{dF}{dt} = 0. \qquad (7.15)$$

თუ მილი არ დეფორმირდება $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ და ამიტომ

$$\frac{dF}{dt} = v_x \frac{\partial F}{\partial x},$$

ხოლო (7.15) ფორმულა ასე გადაიწერება:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) F + \rho v_x \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \qquad (7.16)$$

აქედან კი საბოლოოდ გვექნება, რომ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x F)}{\partial x} = 0. \qquad (7.17)$$

ამრიგად, დავედით სამ განტოლებაზე (7.8), (7.10), (7.17). თუ მოძრაობა სტაციონარულია ეს სისტემა მარტივდება:

$$\frac{d(\rho v_x F)}{dx} = 0, \qquad v_x \frac{dv_x}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0, \qquad \rho = \Phi(p). \qquad (7.18)$$

ეს განტოლებები ადვილად ინტეგრირდება და ბაროტროპული სითხის ერთგანზომილებიანი სტაციონარული მოძრაობის ამოცანის ამონახსნს ექნება სახე:

$$\rho v_x F = C_1, \qquad \frac{v_x^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C_2, \qquad \rho = \Phi(p). \qquad (7.19)$$

$ 2. არაკუმშვადი სითხის მოძრაობა ცვლადკვეთიან მილში.

თუ სითხე არაკუმშვადია და ერთგვაროვანი, $\rho = \rho_0 = const$, მაშინ (7.19) გამოსახულებიდან ვღებულობთ, რომ

$$v_x F = A, \qquad \frac{v_x^2}{2} + \frac{p}{\rho} = B, \qquad \rho = \rho_0 . \tag{7.20}$$

აქედან

$$v_x = \frac{A}{F}, \qquad p = \rho\left(B - \frac{v_x^2}{2}\right) = \rho\left(B - \frac{A^2}{2F^2}\right), \tag{7.21}$$

სადაც $F = F(x)$ ფართობი მოცემულად ითვლება. A და B მუდმივები კი განისაზღვრებიან რაიმე კვეთში მოცემული მახასიათებლების საშუალებით. მაგ., როცა $x = x_0$, $F(x) = F(x_0) = F_0$, $v_x\big|_{x=x_0} = v_x^0$, $p\big|_{x=x_0} = p_0$. რიგ შემთხვევებში სიჩქარის ნაცვლად შეიძლება მოცემული იქნას ე.წ., სითხის ხარჯი

$$Q = \rho v_x^0 F_0 .$$

(7.21) ამონახსნიდან ჩანს, რომ კვეთის გაზრდა იწვევს სიჩქარის შემცირებას და წნევის გაზრდას.

(7.19) ფორმულები ზოგად ამონახსნს გვაძლევენ. თუ მოცემულია სითხის Q ხარჯი, მაშინ მოძრაობის ძირითადი v, p, ρ მახასიათებლები შეიძლება განვსაზღვროთ ნებისმიერ კვეთში.

ლექცია 13
თავი 8

იდეალური არაკუმშვადი სითხის ბრტყელი უგრიგალო სტაციონარული დინება

დინებას ეწოდება ბრტყელი, თუ სითხის ყველა ნაწილაკი მოძრაობს რაიმე სიბრტყის პარალელურად ისე, რომ ნაწილაკთა სიჩქარეები იმ სიბრტყეში, რომლებიც ამ ფიქსირებული სიბრტყის პარალელურნი არიან ერთნაირია როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით. ამ შემთხვევაში საკმარისია დინება განხილულ იქნეს ერთ სიბრტყეში, ასეთად ავირჩიოთ Oxy სიბრტყე. კოორდინატთა სისტემის ასეთი არჩევისას დინების ყველა დამახასიათებელი სიდიდე მხოლოდ x და y ცვლადების ფუნქცია იქნება. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$v_x = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

რადგან დინება სტაციონარულია, ამიტომ

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

$ 1. განტოლებათა სისტემა.

რადგანაც ვიხილავთ, არაკუმშვად ერთგვაროვან სითხეს, ამიტომ $\rho = \rho_0 = const$ და იგი მოცემულად ითვლება. საძიებელი ფუნქციებია

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad p = p(x, y), \quad \rho = \rho(x, y). \tag{8.1}$$

ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები იქნება:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\frac{de}{dt} = 0. \tag{8.4}$$

ბოლო განტოლება ნიშნავს, რომ არაკუმშვადი სითხის შემთხვევაში ნაწილაკის ენერგია ინახება.

აქ მოცულობითი ძალები უგულვებელყოფილია.

რადგან სითხე არაკუმშვადია, ხოლო დინება - სტაციონარული და უგრიგალო, ამიტომ სამართლიანია ეილერ-ბერნულის ინტეგრალი. უგრიგალო მოძრაობა ნიშნავს, რომ $\vec{\Omega} = rot\vec{v} = 0$. ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში ეს ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \tag{8.5}$$

ხოლო ეილერ-ბერნულის ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{p}{\rho} = C, \tag{8.6}$$

ამრიგად, ბრტყელი უგრიგალო სტაციონარული დინების შემთხვევაში გვაქვს სამი უცნობი v_x, v_y და p. თუ (8.2) და (8.5) განტოლებებიდან განვსაზღვრავთ v_x-სა და v_y-ს, მაშინ (8.6)-დან ვიპოვით p-ს.

$ 2. სიჩქარის პოტენციალი

(8.5) ტოლობიდან გამომდინარეობს ისეთი $\varphi(x, y)$ ფუნქციის არსებობა, რომ

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy\,, \tag{8.7}$$

ე.ი.

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{8.8}$$

თუ (8.2)-ში გავითვალისწინებთ (8.8)-ს, მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{8.9}$$

ამრიგად, სიჩქარის $\varphi(x, y)$ პოტენციალი ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებს. (8.9) განტოლების ამონახსნმა უნდა დააკმაყოფილოს გარკვეული სასაზღვრო პირობებიც.

თუ სხეულის გარსდენა წარმოებს უსასრულო ნაკადით, მაშინ უსასრულობაში მოცემული უნდა იყოს სიჩქარის ნაკადი, ხოლო სხეულის ზედაპირზე უნდა შესრულდეს გარსდენის პირობა, მაშასადამე:

$$v_x\Big|_\infty = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_\infty = v_{\infty x}, \quad v_y\Big|_\infty = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_\infty = v_{\infty y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_s = 0. \tag{8.10}$$

ლაპლასის განტოლების ამონახსნის პოვნის ამოცანა, როდესაც სხეულის საზღვარზე მოცემულია საძიებელი ფუნქციის ნორმალური წარმოებული, ნეიმანის ამოცანად იწოდება. თუ არე უსასრულოა, გვაქვს ნეიმანის გარე ამოცანა (8.10)-ის პირობებით.

$ 3. დენის ფუნქცია.

უწყვეტობის (8.2) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}. \tag{8.10}$$

ეს კი არის პირობა იმისა, რომ დიფერენციალური ფორმა

$$v_x dy - v_y dx$$

წარმოადგენს რაღაც $\psi(x,y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს

$$v_x dy - v_y dx = d\psi\ . \tag{8.12}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{8.13}$$

არაკუმშვადი სითხის ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში მიუხედავად იმისა, დინება გრიგალურია თუ უგრიგალო, $\psi(x,y)$ ფუნქცია ყოველთვის არსებობს.

დავწეროთ, ახლა დენის წირის განტოლება ბრტყელი დინების შემთხვევაში

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}. \tag{8.14}$$

(8.13) განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$v_x dy - v_y dx = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) = -d\psi = 0. \tag{8.15}$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ დენის წირის გასწვრივ

$$\psi(x,y) = const. \tag{8.16}$$

$\psi(x,y)$ ფუნქციას დენის ფუნქციას უწოდებენ. (8.16) ტოლობა გვაძლევს დენის წირის განტოლებას. მუმივის სხვადასვხა მნიშვნელობის მინიჭებით სხვადასხვა დენის წირს მივიღებთ. დენის ფუნქციის საშუალებით შეიძლება გამოითვალოს სითხის ხარჯი რაიმე AB წირში:

$$Q = \int_A^B v_n ds = \int_A^B \left[v_x \cos(n,x) + v_y \cos(n,y)\right] ds \tag{8.17}$$

სადაც ds არის წირის ელემენტი. თუ dx და dy წარმოადგენს - წირის ელემენტის გეგმილებს, მაშინ

$$\cos(n,x) = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos(n,y) = -\frac{dx}{ds}. \tag{8.18}$$

თუ (8.18) შევიტანთ (8.17)-ში მივიღებთ, რომ

$$Q=\int_A^B(v_x dy - v_y dx)=\int_A^B\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\right]=\int_A^B d\psi=\psi_B-\psi_A\,. \tag{8.19}$$

ამრიგად, სითხის ხარჯი AB წირში ტოლია წირის ბოლოებში დენის ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობისა.

რადგანაც განიხილება უგრიგალო მოძრაობა, ამიტომ

$$\Omega_z=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\Delta\psi=0, \tag{8.20}$$

ე.ი. უგრიგალო მოძრაობის დროს დენის ფუნქცია ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებს. (8.20) განტოლება საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ დენის ფუნქცია გარკვეული სასაზღვრო პირობებში. ვთქვათ, სითხე გარს ედინება სითხის გაუმტარი სხეულის ზედაპირს. ამ ზედაპირზე $v_n=0$. თუ ამ პირობას დენის ფუნქციის საშუალებით ჩავწერთ, მივიღებთ, რომ

$$v_n\big|_s=\left[v_x\cos(n,x)+v_y\cos(n,y)\right]_s=\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}\right]_s=\frac{\partial\psi}{\partial s}\bigg|_s=0. \tag{8.21}$$

მაშასადამე, სხეულის s კონტურზე უნდა შესრულდეს პირობა

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}\bigg|_s=0\,,\quad \text{ე.ი.}\quad \psi\big|_s=const. \tag{8.22}$$

ამრიგად, სხეულის კონტურზე დენის ფუნქცია მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ სხეულის საზღვარი დენის წირი უნდა იყოს.

მაშასადამე, უგრიგალო მოძრაობის დროს დენის ფუნქცია უნდა იყოს ლაპლასის განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს უსასრულობასა და სხეულის საზღვარზე არსებულ პირობებს

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_\infty=-v_{\infty y}\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}\bigg|_\infty=-v_{\infty x}\quad \psi\big|_s=const. \tag{8.23}$$

ლაპლასის განტოლების ამონახსნის მოძებნის ამოცანა, როდესაც საზღვარზე მოცემულია საძებნი ფუნქციის მნიშვნელობა, დირიხლეს ამოცანად იწოდება. (8.23) განტოლებები წარმოადგენენ დირიხლეს გარე ამოცანის სასაზღვრო პირობებს.

აქ ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ სიჩქარის პოტენციალი მხოლოდ უგრიგალო მოძრაობის დროს არსებობს. დენის ფუნქცია კი - ყოველთვის.