ლექცია 7

5. ფუნქციები

5.1. ფუნქციები და გრაფიკები

განსაზღვრა 5.1.1. x ცვლადის *ფუნქცია* არის f წესი, რომელიც x-ის ყოველ მნიშვნელობას უთანადებს ერთადერთ $f(x)$ რიცხვს, რომელსაც y-ით აღნიშნავენ. ყოველივე ამას ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$y = f(x). \tag{5.1.1}$$

x-ის ცვლილების X სიმრავლეს *განსაზღვრის არე* ეწოდება, ხოლო y-ის ($f(x)$-ის) მნიშვნელობათა Y სიმრავლეს – ფუნქციის *მნიშვნელობათა არე*. სხვა სიტყვებით, f ფუნქცია არის X სიმრავლის Y სიმრავლეზე *ასახვა*, რაც შემდეგნაირად აღინიშნება:

$$f: X \to Y \quad \left(x \mapsto f(x)\right). \tag{5.1.2}$$

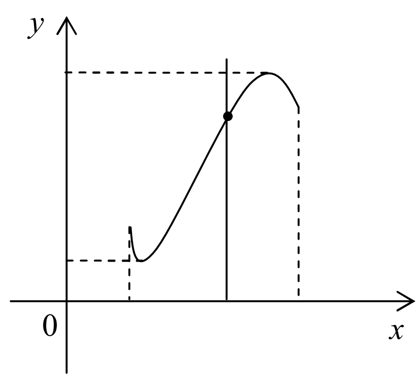
(5.1.1) და (5.1.2) აღნიშვნები ერთსა და იმავე f ფუნქციას (ასახვას) გამოხატავს. x-ს დამოუკიდებელი, ხოლო y-ს დამოკიდებული ცვლადი ეწოდება.

განსაზღვრა 5.1.2. *ფუნქციის გრაფიკი* ეწოდება $\left(x, f(x)\right)$ დალაგებული წყვილების შესაბამის წერტილთა სიმრავლეს Oxy კოორდინატთა სისტემაში, როცა x გაირბენს თავისი განსაზღვრის მთელ X არეს (სიმრავლეს).

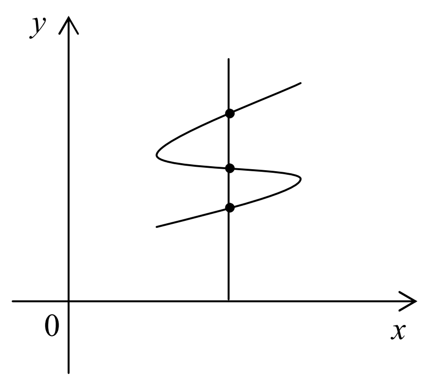
ფუნქციის გრაფიკის მაგალითებია ჩვენ მიერ ადრე განხილული წრფე, წრეწირი და პარაბოლა, რომელთა შესაბამის ფუნქციებს მივიღებთ მათი განტოლებების y-ის მიმართ ამოხსნით:

$$y = kx + b\,, \;\; y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}\,, \;\; y = 4px^2\,, \tag{5.1.3}$$

სადაც k, b და p მუდმივებია ("+" ფესვის წინ შეესაბამება ზედა ნახევარწრეწირს, ხოლო "-" – ქვედა ნახევარწრეწირს). ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარე, წირი ნახ. 5.1.1-ზე გამოხატავს



ნახ.5.1.1



ნახ.5.1.2

ფუნქციას (რადგან ვერტიკალური წრფე წირს მხოლოდ ერთ წერტილში გადაკვეთს), ხოლო ნახ. 5.1.2-ზე გამოსახული წირი არ გამოხატავს ფუნქციას (რადგან ვერტიკალური წრფე წირს ერთზე მეტ წერტილში გადაკვეთს და ყოველი x-ის შესაბამისი მნიშვნელობა ცალსახად არ იქნება განსაზღვრული; სხვა სიტყვებით, ყოველ x-ს შეესაბამება რამდენიმე, სახელდობრ 3, მნიშ-

ვნელობა, მაშინ, როდესაც ფუნქციის ცნება მოითხოვს, რომ x-ს y-ის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა შეესაბამებოდეს).*)

(5.1.3) ფუნქციები წარმოადგენს ფუნქციის გამჭვირვალე მაგალითებს, რამდენადაც ისინი ერთი ფორმულით არიან წარმოდგენილი. თავდაპირველად მათემატიკოსები მხოლოდ ასეთ ფუნქციებს განიხილავდნენ. ფუნქციის მაგალითია აგრეთვე

$$y=\begin{cases}1, \text{ როცა } x \text{ რაციონალურია},\\ 0, \text{ როცა } x \text{ ირრაციონალურია},\end{cases}$$

ტოლობებით მოცემული *დირიხლეს*** *ფუნქცია*, რომლის გრაფიკული წარმოდგენა შეუძლებელია.

განსაზღვრა 5.1.3. $f(x)$ და $g(x)$ *ფუნქციების ჯამი*, *სხვაობა*, *ნამრავლი* და *განაყოფი* შესაბამისად ეწოდება

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x),\ (f-g)(x):=f(x)-g(x),\ (fg)(x):=f(x)g(x)$$

და

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x):=\frac{f(x)}{g(x)},\ \ g(x)\neq 0,$$

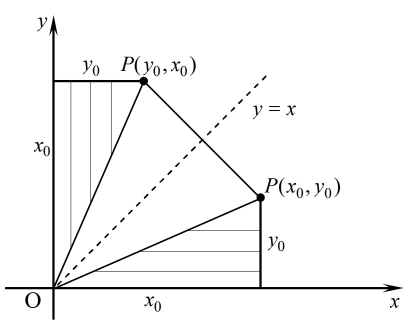
ფუნქციებს.

განსაზღვრა 5.1.5. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების *რთული ფუნქცია* (*ფუნქციების კომპოზიცია*) ეწოდება

$$f(g(x))\equiv(f\circ g)(x)$$

---

*) ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ x-ის განსხვავებულ მნიშვნელობებს y-ის განსხვავებული მნიშვნელობები შეესაბამება. თუ y-ს შევუსაბამებთ ისეთ x-ს, რომლისთვისაც სრულდება $y=f(x)$, მაშინ მივიღებთ წესს, რომელიც მოგვცემს ფუნქციას, რომელსაც f ფუნქციის *შებრუნებული ფუნქცია* ეწოდება. ის აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი და $x=f^{-1}(y)$. $y=f^{-1}(x)$ (ცვლადები შევცვალეთ) ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის სარკული ასახვით $y=x$ წრფის მიმართ, რადგან $y=f(x)$ ფუნქციის ყოველ (x_0,y_0) დალაგებულ წყვილს სიბრტყეზე შეესაბამება $y=f^{-1}(x)$ ფუნქციის (y_0,x_0) დალაგებული წყვილი სიბრტყეზე, რომელიც (x_0,y_0) წერტილის სარკული ასახვაა $y=x$ წრფის მიმართ, რამდენადაც ნახაზზე დაშტრიხული სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარე, ამ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს $y=x$ წრფე შუაზე ყოფს.



**) პ. გ. ლ. დირიხლე (1805 – 1859) – გერმანელი მათემატიკოსი.

ფუნქციას, რომელიც მიიღება $f(x)$-ის გამოსახულებაში ყველგან x-ის ნაცვლად $g(x)$-ის ჩასმით.

აღქმისთვის შეიძლება უფრო მარტივი იყოს რთული ფუნქციის შემდეგი წარმოდგენა: თუ გვაქვს

$$z = f(y) \text{ და } y = g(x)$$

ფუნქციები, მაშინ

$$z = f\big(g(x)\big) = h(x)$$

წარმოადგენს რთულ ფუნქციას. ცხადია, რთული ფუნქციის განმარტება გულისხმობს, რომ პირველი ფუნქციის განსაზღვრის არე ემთხვევა მეორე ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს (სიმრავლეს).

განსაზღვრა 5.1.5. ფუნქციას ეწოდება:

– *ზრდადი*, თუ $f(x_1) < f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$;

– *არაკლებადი*, თუ $f(x_1) \le f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$;

– *კლებადი*, თუ $f(x_1) > f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$;

– *არაზრდადი*, თუ $f(x_1) \ge f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$.

ფუნქციას *მკაცრად მონოტონური* ეწოდება, თუ ის ზრდადი ან კლებადია, და – *მონოტონური*, როცა ის არაკლებადი ან არაზრდადია.

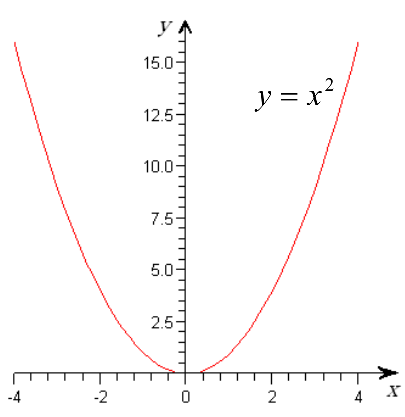
განსაზღვრა 5.1.6. ფუნქციას ეწოდება *ლუწი*, თუ

$$f(-x) = f(x),$$

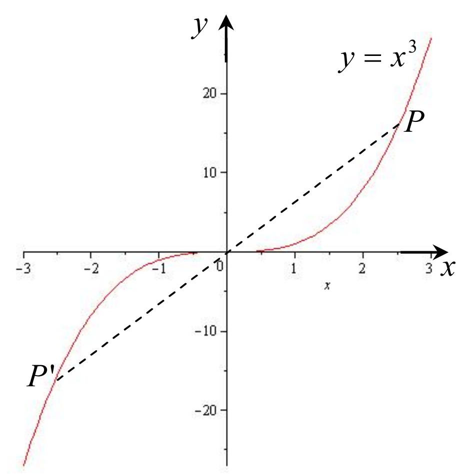
ხოლო *კენტი*, თუ

$$f(-x) = -f(x)$$

ყველა x-ისთვის, სადაც ფუნქცია განსაზღვრულია. ამასთან ორივე შემთხვევაში იგულისხმება, რომ $f(x)$-სთან ერთად $f(-x)$-იც განსაზღვრულია. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, $f(x)$ განსაზღვრული უნდა იყოს სიმეტრიულ $]-a,a[$ ინტერვალზე (ღიაზე ან ჩაკეტილზე).



ნახ. 5.1.3



ნახ. 5.1.4

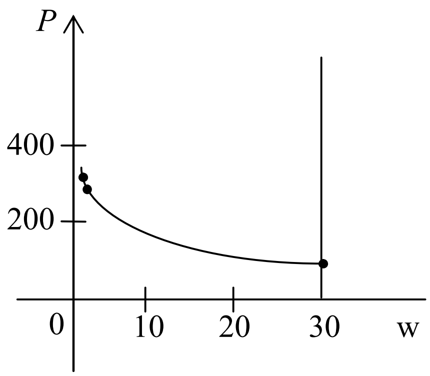
ლუწი ფუნქციის გრაფიკი ორდინატთა y ღერძის სიმეტრიულია (იხ. ნახ. 5.1.3). კენტი ფუნქციის გრაფიკი კოორდინატთა O სათავის სიმეტრიულია (იხ. ნახ. 5.1.4). ეს უკანასკნელი იმას ნიშნავს, რომ თუ P წერტილი ეკუთვნის გრაფიკს, მაშინ გრაფიკს ეკუთვნის P' წერტილიც, რომელიც P და O წერტილების შემაერთებელ წრფეზე მდებარეობს, ამასთან O წერტი-

ლი PP' სეგმენტის (მონაკვეთის) ცენტრია, ე.ი. თანაბრადაა დაშორებული სეგმენტის P და P' ბოლო წერტილებიდან.

განსაზღვრა 5.1.7. $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R^1$, სახის ფუნქციას *ხარისხოვანი ფუნქცია* ეწოდება, სადაც x ფუძეა, ხოლო α – *ხარისხის მაჩვენებელი.* ამ ფუნქციას ბიოლოგიაში მოდელირებისას მრავალი გამოყენება აქვს. მაგალითად, ალტმანისა და დიტმერის*) მიერ დადგენილია შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა

$$P = 200w^{-\frac{1}{4}},$$

რომელიც ძუძუმწოვრების P პულსს (გულის შეკუმშვათა რაოდენობას წუთში) წარმოადგენს როგორც w წონის (კგ-ში) ფუნქციას. როგორც ვხედავთ, მცირეწონიანი ცხოველების პულსი უფრო მაღალია, ვიდრე მძიმეწონიანი ცხოველების (იხ. ნახ. 5.1.5).



ნახ.5.1.5

განსაზღვრა 5.1.8. $y = a^x$, $a = \text{const} > 0$, სახის ფუნქციას *მაჩვენებლიანი ფუნქცია* ეწოდება, სადაც a ფუძეა, ხოლო x – *ხარისხის მაჩვენებელი.* ის გვხვდება, მაგალითად, *მალთუსის**) *დისკრეტული მოდელის* ანალიზისას. ვთქვათ, n-ით აღნიშნულია ათწლეულის ნომერი რაიმე დროიდან (მაგალითად, 1790 წლიდან), ხოლო P_n-ით – მოსახლეობის რაოდენობა n-ურ ათწლეულში, P_0 მოსახლეობის რაოდენობაა 1790 წელს. მალთუსმა მოგვცა მოსახლეობის რაოდენობის განსაზღვრის შემდეგი მოდელი: მოცემულ ათწლეულში მოსახლეობის რაოდენობა მიიღება წინა ათწლეულში მოსახლეობის რაოდენობაზე ამ უკანასკნელისა და r საშუალო ზრდის კოეფიციენტის (ტემპის) ნამრავლის დამატებით. მათემატიკურად ეს მოდელი ასე ჩაიწერება:

$$P_{n+1} = P_n + rP_n = (1+r)P_n. \tag{5.1.4}$$

ზრდის r ტემპი აშშ-ში 1790 წლიდან 1860 წლამდე 0,349-ის ტოლი იყო. (5.1.4)-დან ცხადია,

$$\begin{aligned} &P_1 = (1+r)P_0, \\ &P_2 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &P_n = (1+r)P_{n-1} = (1+r)^2 P_{n-2} = \cdots = (1+r)^n P_0. \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

ამრიგად,

$$P_n = (1+r)^n P_0, \tag{5.1.6}$$

რაც იმაზე მიუთითებს, რომ მოსახლეობა იზრდება როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქცია.

(5.1.6) ფორმულა შეიძლება უფრო მკაცრად დამტკიცდეს *მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის* გამოყენებით, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

A მტკიცება, დამოკიდებული n ნატურალურ პარამეტრზე (ე. ი. მას $A(n)$ სახე აქვს), დამტკიცებულად ითვლება, თუ სამართლიანია $A(1)$, და $A(n)$-ის სამართლიანობიდან გამომდინარეობს $A(n+1)$-ის სამართლიანობა.

---

*) P. L. Altmann, D. M. Dittmer, eds. (1964) Biology Data Book. Federation of American Societies for Experimental Biology, pp. 234-235.

*) თ. რ. მალთუსი (1766 – 1834) – ინგლისელი ეკონომისტი, მღვდელი.

მართლაც, ის, რომ $(5.1.6)$ სამართლიანია $n=1$-სთვის, ცხადია $(5.1.5)$-დან. ახლა დავუშვათ მისი სამართლიანობა n-სთვის, ე. ი. ვუშვებთ $(5.1.6)$-ის სამართლიანობას და ვაჩვენოთ, რომ ის სამართლიანი იქნება $(n+1)$-ისთვისაც. $(5.1.4)$ და $(5.1.6)$-დან ნათელია, რომ

$$P_{n+1} = (1+r)P_n = (1+r)(1+r)^n P_0 = (1+r)^{n+1} P_0 .$$

განსაზღვრა 5.1.9. მოცემული A დადებითი რიცხვის *ლოგარითმი* $a>0$ $(a \neq 1)$ დადებითი ფუძით (აღინიშნება შემდეგნაირად: $\log_a A$) ეწოდება ისეთ b რიცხვს, რომელშიც ახარისხებული a ფუძე გვაძლევს მოცემულ A რიცხვს ($A=a^b$, $\log_a A = b$, $\lg A := \log_{10} A$, $\ln A := \log_e A$, სადაც $e \approx 2{,}7$ ნეპერის რიცხვია).

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$1.\ a^{\log_a^A} = A; \quad 2.\ \log_a 1 = 0,\ 3.\ \log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B,$$

$$4.\ \log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B, \qquad 5.\ \log_a A^d = d \log_a A,$$

$$6.\ \log_a \sqrt[m]{A} = \frac{1}{m} \log_a A, \qquad 7.\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

სადაც a, b, c, A, B დადებითი რიცხვებია, d ნამდვილი რიცხვია, ხოლო m – ნატურალური რიცხვი, ამასთან $a \neq 1$, $c \neq 1$. მართლაც, პირველი გამომდინარეობს განმარტებიდან; მეორე ცხადია, რადგან ყოველი ნულისგან განსხვავებული რიცხვი ნულ ხარისხში ერთის ტოლია; მესამე გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან: განმარტების თანახმად,

$$A = a^{\log_a A}, \qquad B = a^{\log_a B},$$

რომელთა გამრავლებით მივიღებთ

$$AB = a^{\log_a A} a^{\log_a B} = a^{\log_a A + \log_a B},$$

საიდანაც a ფუძით გალოგარითმებით (ე.ი. ვიყენებთ ლოგარითმის განმარტებას) გვექნება

$$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B;$$

მეოთხე დამტკიცდება ანალოგიურად; მეხუთე გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან:

$$A = a^{\log_a A},$$

ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ d ხარისხში, მივიღებთ

$$A^d = a^{d \log_a A},$$

საიდანაც a ფუძით გალოგარითმებით (ე.ი. ვიყენებთ ლოგარითმის განმარტებას) გვექნება

$$\log_a A^d = d \log_a A;$$

მეექვსე მეხუთის კერძო შემთხვევაა $\left(d = \dfrac{1}{m}\right)$;

მეშვიდე გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან: გავალოგარითმოთ c ფუძით

$$b = a^{\log_a b},$$

მივიღებთ

$$\log_c b = \log_a b \log_c a,$$

საიდანაც

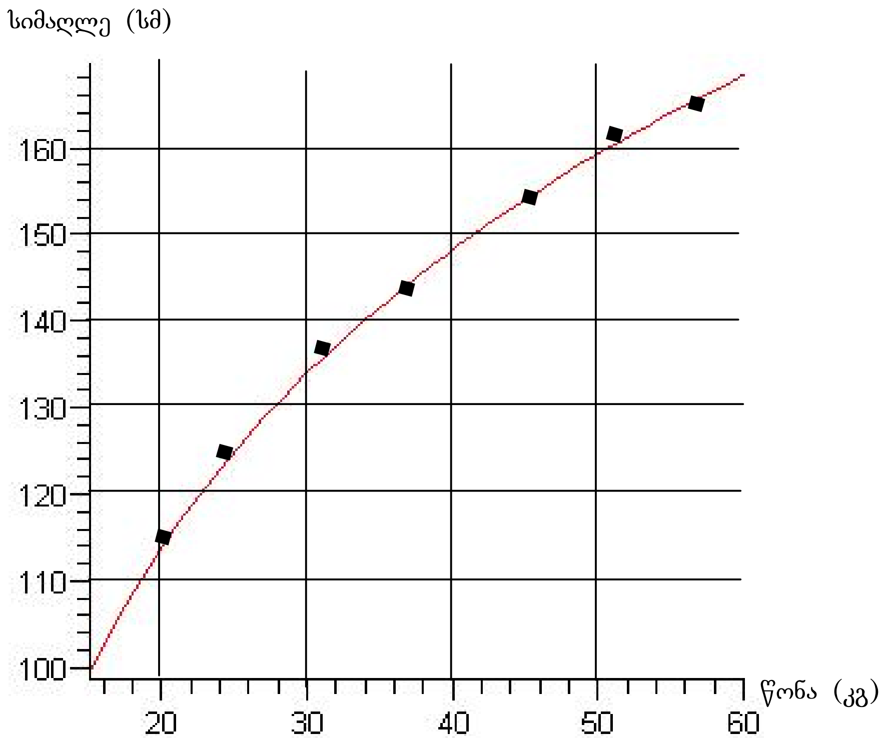
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$\log_a x$ სახის ფუნქციას (ის განსაზღვრულია, როცა $x > 0$) *ლოგარითმული ფუნქცია* ეწოდება.

ბავშვებში H სიმაღლესა (სმ-ში) და w წონას (კგ-ში) შორის კავშირი მოიცემა (იხ. ნახ. 5.1.6)

$$H(w) = 49{,}5\ln w - 34{,}14$$

ფორმულით. ეს ფორმულა მიღებულია აშშ-ში, გარკვეულ პერიოდში, 5-დან 13 წლამდე გოგონებზე დაკვირვების შედეგად.



ნახ. 5.1.6