ლექცია 3

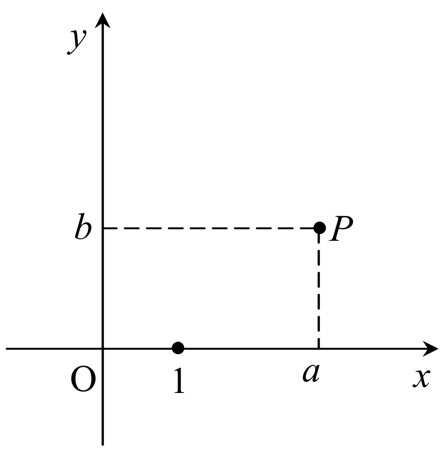
2. კოორდინატები

კალკულუსი ეყრდნობა ორ ძირითად საფუძველს: ნამდვილ რიცხვთა თეორიას, რომელიც ხანგრძლივ ისტორიულ პერიოდში ვითარდებოდა, და ანალიზურ გეომეტრიას, რომელიც XVII საუკუნეში დეკარტისა*) და ფერმას**) მიერ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად იყო გააზრებული.

ანალიზური გეომეტრიის ძირითადი იდეა მარტივია: სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობა შეიძლება ორი რიცხვით აღიწეროს და ამდენად ყოველი დებულება წერტილების შესახებ შეიძლება გადაყვანილ იქნეს დებულებებში რიცხვებზე.

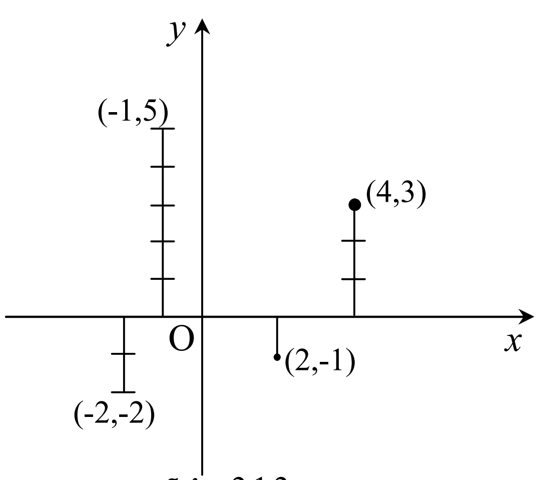
2.1. წერტილის კოორდინატები. მანძილის ფორმულა

სიბრტყეში გავავლოთ ორი ურთიერთპერპენდიკულარული წრფე. ჰორიზონტალურ წრფეს ვუწოდოთ აბსცისთა ღერძი, ხოლო ვერტიკალურს – ორდინატთა ღერძი, მათი თანაკვეთის წერტილს კი – დეკარტის კოორდინატთა სისტემის სათავე (იხ. ნახ. 2.1.1).

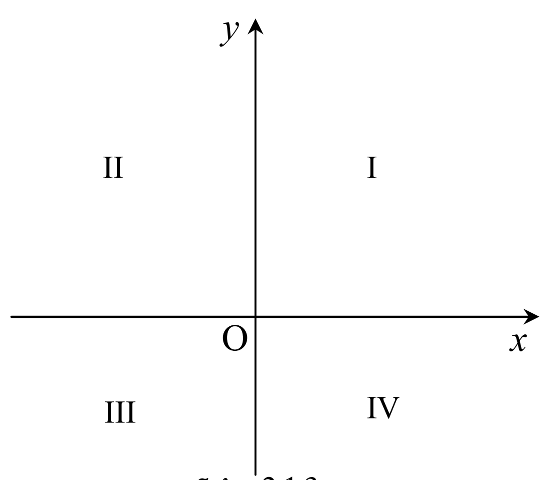


ნახ. 2.1.1

შევარჩიოთ სიგრძის ერთეული (მასშტაბის ერთეული). ყოველ P წერტილს სიბრტყეზე ვუთანადებთ დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა (a,b) წყვილს (ე. ი. (1,2) და (2,1) სხვადასხვა წყვილს წარმოადგენენ), რომელთაც P წერტილის კოორდინატები (a-ს აბსცისა, ხოლო b-ს ორდინატა ეწოდება) ეწოდება და გამოხატავს მანძილს შესაბამისად y და x ღერძამდე. პირველი კოორდინატი (აბსცისა) დადებითია (უარყოფითია) ყველა იმ წერტილისთვის, რომელიც y ღერძის მარჯვნივ (მარცხნივ) მდებარეობს, ე. ი. მარჯვენა (მარცხენა) ნახევარსიბრტყეში. ანალოგიურად, მეორე კოორდინატი (ორდინატა) დადებითია (უარყოფითია), თუ წერტილი მდებარეობს ზედა (ქვედა) ნახევარსიბრტყეში (იხ. ნახ. 2.1.2). კოორდინატთა სიბრტყე იყოფა ოთხ კვადრანტად (იხ. ნახ. 2.1.3): I ($x>0, y>0$), II ($x<0, y>0$), III ($x<0, y<0$), IV ($x>0, y<0$).



ნახ. 2.1.2



ნახ. 2.1.3

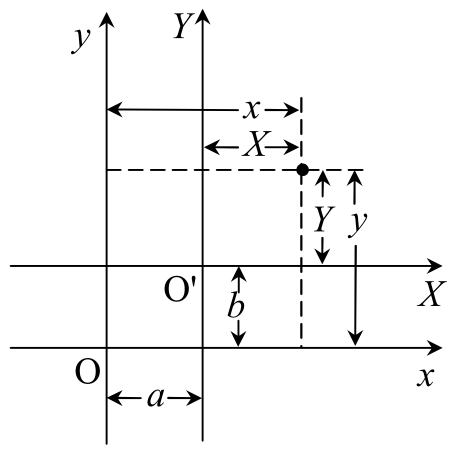
*) რენე დეკარტი (1596 – 1650) – ფრანგი ფილოსოფოსი და მათემატიკოსი

**) პ. ფერმა (1601 – 1665) – ფრანგი მათემატიკოსი, პროფესიით იურისტი

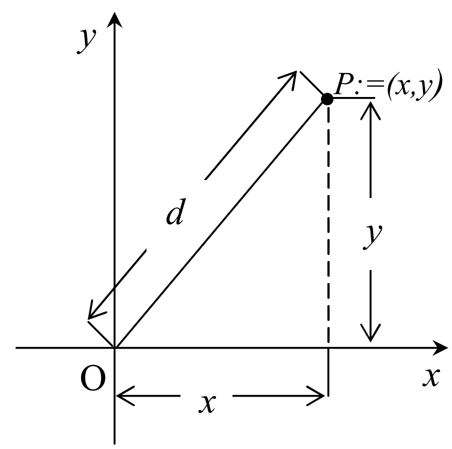
კოორდინატთა სისტემის შერჩევის შემდეგ მყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა სიბრტყის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებს შორის. თუმცა კოორდინატთა სისტემის შერჩევის დროს დიდია თავისუფლება კოორდინატთა სისტემის სათავის, ღერძების მიმართულების და მასშტაბის ერთეულის შერჩევის თვალსაზრისით. ერთი და იგივე წერტილს სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაში რიცხვთა სხვადასხვა დალაგებული წყვილი ეთანადება. მაგალითად, თუ ავიღებთ რაიმე კოორდინატთა სისტემას და ახალ კოორდინატთა სისტემას მივიღებთ მხოლოდ კოორდინატთა სისტემის სათავის გადატანით ღერძების მიმართულებებისა და მასშტაბის ერთეულის შეუცვლელად, მაშინ ძველ (x, y) და ახალ (X,Y) კოორდინატებს შორის კავშირი მოიცემა (იხ. ნახ. 2.1.4)

$$x = a + X, \quad y = b + Y; \qquad X = x - a, \quad Y = y - b, \tag{2.1.1}$$

ტოლობებით, სადაც (a,b) ახალი სათავის კოორდინატებია ძველი სისტემის მიმართ.



ნახ. 2.1.4



ნახ. 2.1.5

თეორემა 2.1.1. d მანძილი $P_1 := (x_1, y_1)$ და $P_2 := (x_2, y_2)$ წერტილებს შორის მოიცემა

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.1.2}$$

მანძილის ფორმულით.

დამტკიცება. პითაგორას[*)] თეორემის თანახმად, მანძილი (x, y) წერტილიდან $(0,0)$ სათავემდე (იხ. ნახ. 2.1.5)

$$\sqrt{x^2 + y^2} \text{ -ის} \tag{2.1.3}$$

ტოლია. თუ ახლა სათავეს გადავიტანთ P_1 წერტილში, მაშინ, (2.1.1)-ის ძალით, P_2 წერტილის კოორდინატები ახალი სათავის მიმართ, გამოსახული ძველი კოორდინატების საშუალებით, იქნება (იხ. ნახ. 2.1.6)

$$(X,Y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

და (2.1.2)-ის მტკიცება გამომდინარეობს (2.1.3)-დან. ცხადია, (2.1.2) ფორმულა პითაგორას თეორემის უშუალო გამოყენებითაც მიიღება (იხ. ნახ. 2.1.6). ■

ზემოთქმულის ანალოგიურად, სივრცის წერტილებს ურთიერთცალსახად ეთანადება რიცხვთა დალაგებული სამეულები (მესამე კოორდინატს აპლიკატა ეწოდება); შემოგვაქვს სივრცეში დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის ცნება; მხოლოდ სათავის გადატანის შემთხვევაში ძველ (x, y, z) და ახალ (X,Y,Z) კოორდინატებს შორის კავშირი მოიცემა

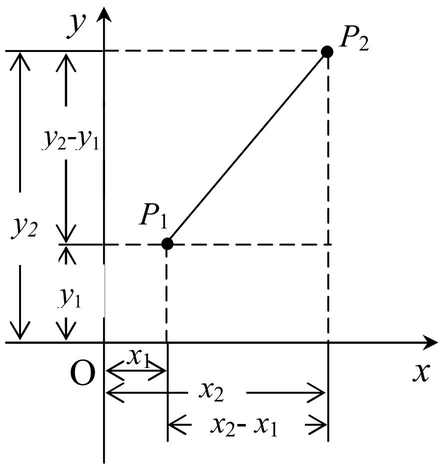
[*)] პითაგორა სამოსელი (ძვ. წ. დაახლ. 570 – დაახლ. 500) – ბერძენი მოაზროვნე

$$x=a+X\,,\;\; y=b+Y\,,\;\; z=c+Z\,;\;\; X=x-a\,,\;\; Y=y-b\,,\;\; Z=z-c\,,$$

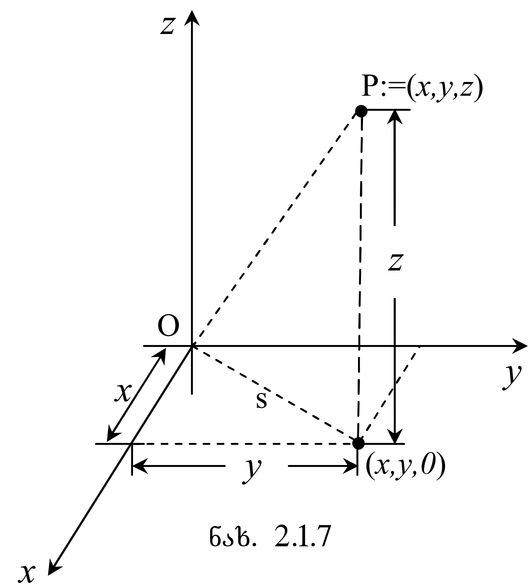
ტოლობებით, სადაც (a,b,c) ახალი სათავის კოორდინატებია ძველი სისტემის მიმართ; და მტკიცდება (იხ. ნახ. 2.1.7) $P:=(x,y,z)$ წერტილიდან სათავემდე $\left(d^2=s^2+z^2, s^2=x^2+y^2\right)$

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

მანძილისა და $P_1:=(x_1,y_1,z_1)$ და $P_2:=(x_2,y_2,z_2)$ წერტილებს შორის მანძილის



ნახ. 2.1.6



ნახ. 2.1.7

$$d=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2+\left(z_1-z_2\right)^2}$$

ფორმულები.

2.2. წრფე. ჭრიჭინა და ტემპერატურა

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ, $A,B,C\in R$ და $A^2+B^2\neq 0$. მაშინ ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებს

$$Ax+By+C=0 \tag{2.2.1}$$

განტოლებას, წარმოადგენს წრფეს და, პირიქით, ყოველი წრფე წარმოადგენს იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2.2.1) განტოლებას.

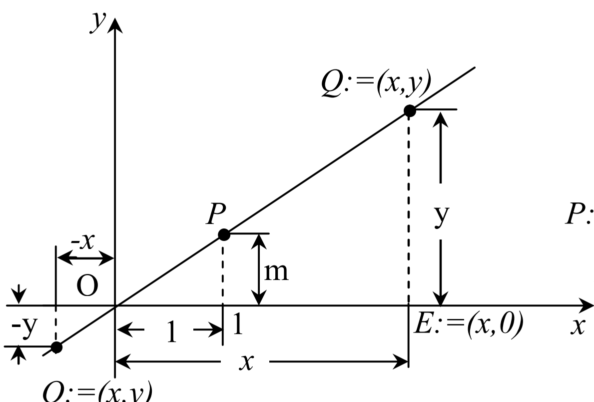
დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ვერტიკალური y ღერძი და მისი პარალელური წრფეები წარმოადგენენ $(x,\, y)$ წერტილთა ისეთ გეომეტრიულ ადგილს, რომლებიც, შესაბამისად, აკმაყოფილებენ $x=0$ და $x=a=\text{const}\neq 0$ განტოლებებს, სადაც $|a|$ გამოსახავს მანძილს y ღერძსა და მის პარალელურ წრფეს შორის. ამ შემთხვევაში [იხ. (2.2.1)] $A=1$, $B=0$, $C=-a$. ანალოგიურად, ჰორიზონტალური წრფე წარმოადგენს იმ $(x,\, y)$ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთათვისაც $y=b=\text{const}$. ამ შემთხვევაში [იხ. (2.2.1)] $A=0$, $B=1$ და $C=-b$.

ვთქვათ, ახლა l წარმოადგენს კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალ წრფეს, რომელიც ღერძებს არ ემთხვევა. მაშინ, თუ P წერტილი l წრფის და $x=1$ წრფის გადაკვეთის წერტილია, მისი კოორდინატები იქნება $(1,m)$, სადაც $m>0$ ან $m<0$ იმის შესაბამისად, l წრფე პირველ თუ მეოთხე კვადრანტში გადის (იხ. ნახ. 2.2.1).

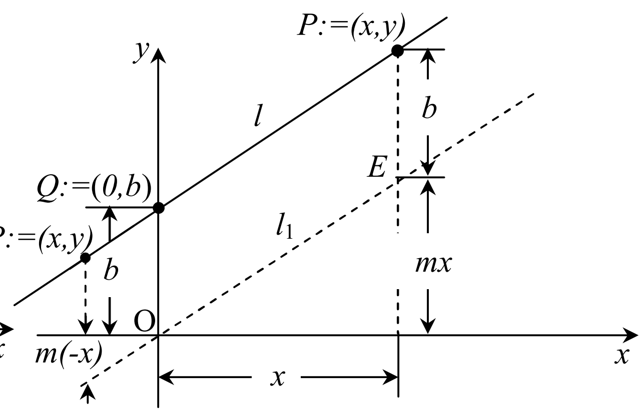
ვთქვათ, ახლა Q l წრფის ნებისმიერი წერტილია. შევნიშნოთ, რომ თუ $m>0$, მაშინ x-ს და y-ს ერთიდაიგივე ნიშანი აქვს, ხოლო როცა $m<0$, – სხვადასხვა. ნახ 2.2.1-დან, O1P და OEQ სამკუთხედების მსგავსების გამო, ცხადია, რომ

$$\frac{|m|}{1}=\frac{|y|}{|x|},\ \text{ე. ი.}\ |y|=|m||x|.$$

ნიშნების შესახებ ზემოთ გაკეთებული შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ თუ წერტილი l წრფეზე მდებარეობს, მაშინ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y=mx$ განტოლებას, მიუხედავად იმისა, $m>0$ თუ $m<0$. მართლაც, როცა $x>0$, ე. ი., $|x|=x$, თუ $m>0$, მაშინ $y>0$, ე. ი., $|y|=y$, $|m|=m$ და $y=mx$; თუ $m<0$, მაშინ $y<0$, ე. ი., $|y|=-y$, $|m|=-m$ და $-y=-mx$, საიდანაც (-1)-ზე გამრავლების შემდეგ მივიღებთ $y=mx$. ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ შემთხვევა $x<0$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყველა (x,y) წერტილი, რომელიც $y=mx$ განტოლებას აკმაყოფილებს, l წრფეს ეკუთვნის. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ (x,y) არ ეკუთვნის l-ს და ეკუთვნის სხვა l_1 წრფეს, რომელიც სათავეზე გადის, მაშინ l_1 გაივლის $(1,m_1)$, $m_1\neq m$, წერტილზე (წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ ორ $(0,0)$ და $(1,m)$ წერტილზე ორი l და l_1 სხვადასხვა წრფეა გავლებული). ახლა, როგორც ზემოთ, შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ (x,y) ეკუთვნის $y=m_1x$ წრფეს. მაშინ, რადგანაც $m_1\neq m$, და ამდენად $m_1x\not\equiv mx$, გამომდინარეობს, რომ $y\neq mx$ და მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამდენად, ჩვენი დაშვება მცდარია. ამ შემთხვევაში $A=m$, $B=-1$ და $C=0$.



ნახ. 2.2.1



ნახ. 2.2.2ა

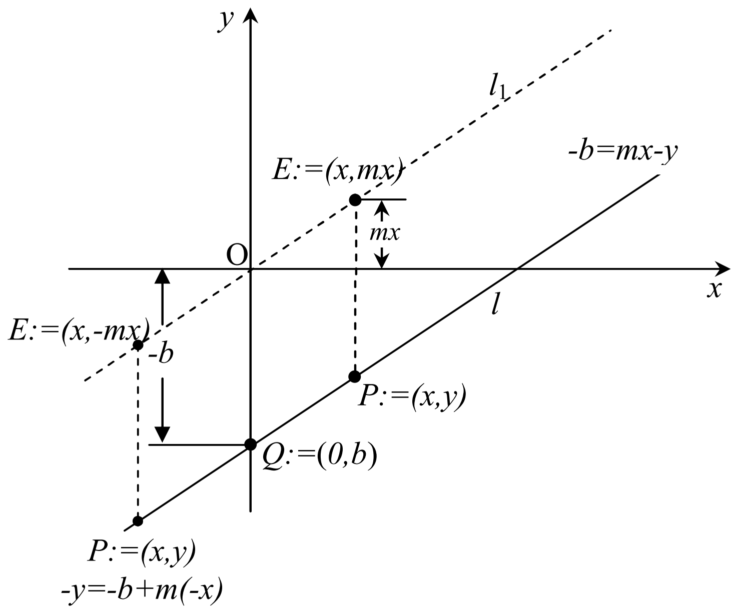
ვთქვათ, ახლა l წრფე არც საკოორდინატო ღერძების პარალელურია და არც სათავეზე გადის. მაშინ ის y ღერძს გადაკვეთს რაიმე $Q:=(0,b)$, $b\neq 0$ წერტილში (იხ. ნახ. 2.2.2ა და ნახ. 2.2.2ბ). სათავეზე გავავლოთ l-ის პარალელური l_1 წრფე. შევნიშნოთ, რომ l l_1-ზე ზევითაა (ქვევითაა), თუ $b>0$ $(b<0)$. როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, l_1-ის განტოლებაა

$$y=mx.$$

ვთქვათ, P არის Q-სგან განსხვავებული წერტილი l-ზე, ხოლო E l-დან x ღერძზე დაშვებული პერპენდიკულარის თანაკვეთაა l_1-თან. მაშინ $OEPQ$ პარალელოგრამში, როგორც მოპირდაპირე გვერდები, OQ და EP მონაკვეთები ტოლია, ცხადია, P და E წერტილებს ტოლი აბსცისები აქვთ, ხოლო P-ს ორდინატა მიიღება E-ს ორდინატისგან b-ს დამატების შემდეგ. ე. ი. P-ს ორდინატა $(mx+b)$-ს ტოლია. ამრიგად, l წრფე წარმოადგენს ისეთ (x, y) წერტილთა სიმრავლეს, რომლის კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ

$$y=mx+b \qquad (2.2.2)$$

განტოლებას, (ე. ი. (2.2.1) განტოლებაში $A = m$, $B = -1$ და $C = b$). ამდენად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ წრფის ყოველი (x, y) წერტილი აკმაყოფილებს (2.2.1) სახის განტოლებას. (2.2.2) დამოკიდებულებას x-სა და y-ს შორის ეწოდება წრფივი დამოკიდებულება, ხოლო y-ს – x-ის წრფივი ფუნქცია.



ნახ. 2.2.2ბ

ახლა, ვთქვათ, რომ (2.2.1) განტოლებაში $B = 0$ და $A \neq 0$, მაშინ მივიღებთ

$$x = -\frac{C}{A}$$

განტოლებას, რომელიც ვერტიკალური წრფეების განტოლებაა. თუ $B \neq 0$, მაშინ (2.2.1)-დან მივიღებთ, რომ

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

ე. ი.,

$$y = mx + b,$$

სადაც

$$m := -\frac{A}{B}, \quad b := -\frac{C}{B}.$$

როცა $m = 0$, მივიღებთ ჰორიზონტალურ წრფეებს. როცა $m \neq 0$, მაგრამ $b = 0$, მივიღებთ სათავეზე და $(1, m)$ წერტილზე გამავალ წრფეს. თუ $b \neq 0$, მაშინ როგორც ეს ზემოთ ვაჩვენეთ, (2.2.1)-ის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს $(0, b)$ წერტილზე გამავალ წრფეს, რომელიც $(0,0)$ და $(1, m)$ წერტილებზე გამავალი წრფის პარალელურია.

(2.2.2) განტოლებაში m *რიცხვს წრფის დახრა* (slope) ეწოდება (მას საკუთხო კოეფიციენტსაც უწოდებენ), ხოლო b-ს – *კვალი* (intercept).

ვთქვათ, (2.2.2) განტოლებით მოცემული წრფე (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებზე გადის, მაშინ

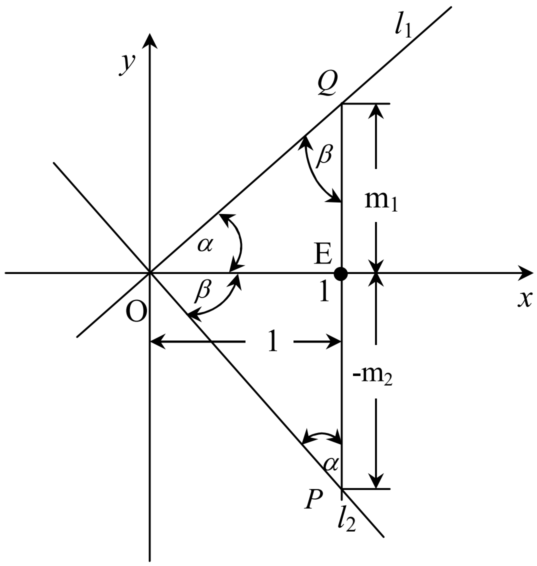
$$y_1 = mx_1 + b, \quad y_2 = mx_2 + b.$$

თუ მეორეს პირველს გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

(შევნიშნოთ, რომ თუ $y_1 = y_2$, წრფე ჰორიზონტალურია, ხოლო თუ $x_1 = x_2$ – ვერტიკალური), საიდანაც, თუ ჩავთვლით, რომ წრფე ვერტიკალური არ არის, ე. ი. $x_1 \neq x_2$, მივიღებთ, რომ დახრა*)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



ნახ. 2.2.3

თეორემა 2.2.2. ორი სხვადასხვა წრფე პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი დახრები ტოლია.

დამტკიცება. როგორც ეს თეორემა 2.2.1-ის დამტკიცების დროს ვნახეთ, არავერტიკალური l წრფის დახრა ტოლია მისი პარალელური, სათავეზე გამავალი l_1 წრფის დახრის. ამიტომ ორი არავერტიკალური წრფე პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი დახრები ტოლია, რადგან მათი დახრა სათავეზე გამავალი მათი პარალელური ერთი და იმავე წრფის დახრის ტოლია. მეორე მხრივ, ნათელია, რომ ვერტიკალური და არავერტიკალური წრფეები პარალელური არაა. ■

თეორემა 2.2.3. ორი წრფე ურთიერთპერპენდიკულარულია, როცა ან ერთი ჰორიზონტალურია და მეორე – ვერტიკალური, ან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი დახრების ნამრავლი

$$m_1 m_2 = -1. \qquad (2.2.3)$$

დამტკიცება. საკმარისია, თეორემა დავამტკიცოთ სათავეზე გამავალი წრფეებისათვის, რადგან წრფეების პარალელური გადატანით მათი დახრები არ იცვლება და, ამდენად, ამ უკანასკნელ შემთხვევაზე დავალთ. ცხადია, ჰორიზონტალური წრფე ვერტიკალურის მართობია და პირიქით. ერთიდაიგივე კვადრანტში გამავალ წრფეებს შორის კუთხე 90°-ზე ნაკლებია და ამიტომ ისინი ურთიერთმართობი ვერ იქნებიან. ამასთან ამ შემთხვევაში m_1 და m_2 ან ორივე დადებითია, ან ორივე უარყოფითია. ამდენად $m_1 m_2 > 0$ და (2.2.3) არ სრულდება. განსახილველი დარჩა ნახ. 2.2.3-ზე მითითებული შემთხვევა, როცა $m_1 > 0$, $m_2 < 0$. განმარტების თანახმად l_1 და l_2 ურთიერთმართობია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha + \beta = 90^\circ$. თუ $\alpha = \beta \neq 45^\circ$, მაშინ ან $\alpha + \beta > 90^\circ$ ან $\alpha + \beta < 90^\circ$. ამდენად, l_1 ან l_2 წრფეები არაა ურთიერთმართობი. თუ $\alpha = \beta = 45^\circ$, მაშინ $\alpha + \beta = 90^\circ$, ამასთან $m_1 = 1$ და $m_2 = -1$, ე.ი. $m_1 m_2 = -1$. მაგრამ, თუ $\alpha \neq \beta$, მაშინ $\alpha + \beta$ მართია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა QOE და OPE სამკუთხედები მსგავსია. ისინი კი მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\frac{|m_1|}{1} = \frac{1}{|m_2|},$$

ეს კი ტოლფასია

$$|m_1 m_2| = 1$$

ტოლობის. რაც რადგან m_1-სა და m_2-ს ურთიერთსაწინააღმდეგო ნიშნები აქვთ, ტოლფასია

$$m_1 m_2 = -1$$

ტოლობის. ■

*) ცხადია, როგორც ეს მომდევნო ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ის წრფის მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსის ტოლია.

თეორემა 2.2.4. (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებზე $(x_1 \neq x_2,\, y_1 \neq y_2)$ გამავალ წრფის განტოლებას აქვს

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad \text{ან რაც იგივეა} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{2.2.4}$$

სახე.

დამტკიცება. ერთი მხრივ, უშუალოდ დავრწმუნდებით იმაში, რომ (x_1, y_1) და (x_2, y_2) აკმაყოფილებენ (2.2.4)-ს.

მეორე მხრივ, რადგან (2.2.4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x - \frac{x_2(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2} + y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1 - x_2},$$

ან რაც იგივეა

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + y_! = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1},$$

ამიტომ (2.2.4) წარმოადგენს წრფის განტოლებას.

■

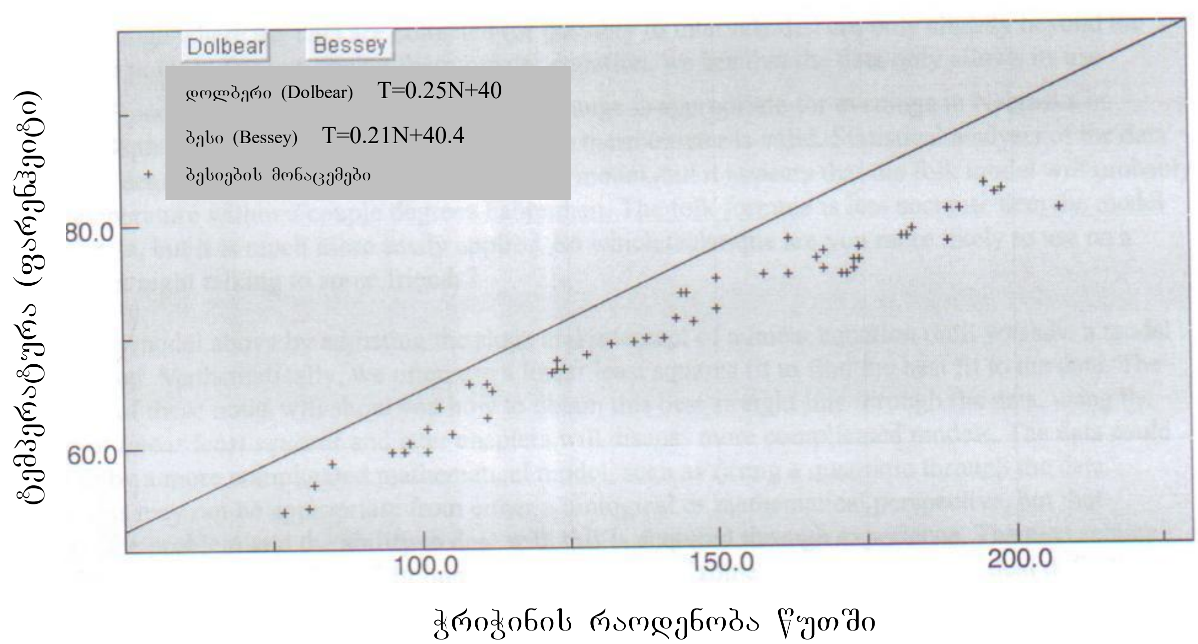
ფარენჰეიტის შკალის გრადუსებში F ტემპერატურის დადგენის ხალხური მეთოდი მდგომარეობს ერთ წუთში ჭრიჭინების სინქრონული დაჭრიჭინების N რაოდენობის 4-ზე გაყოფასა და 40-ის დამატებაში. ამ საკითხისადმი მიძღვნილი პირველი მათემატიკური ფორმულა

$$F = 50 + \frac{N - 40}{4},$$

რომელიც, ცხადია, ხალხური მეთოდის შესაბამისია, რადგან

$$50 + \frac{N - 40}{4} = \frac{N}{4} + 40,$$

ა. დოლბერის (A. Dolbear) 1897 წელს გამოქვეყნებულ სტატიაში გვხვდება. ძმებ ბესიების (C. A. Bessey, E. A. Bessey) მიერ 1898 წელს გამოქვეყნებულ სტატიაში ფორმულას აქვს



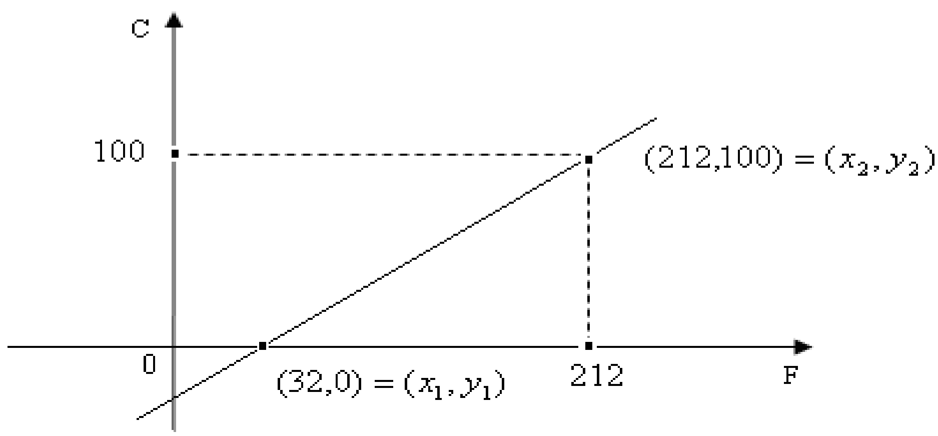
ნახ. 2.2.4

$$F = 60 + \frac{N - 92}{4{,}7}$$

სახე, რაც მათ მიერ 1897 წლის აგვისტოსა და სექტემბერში ჩატარებულ დაკვირვებებს ეფუძნებოდა. დოლბერისა და ბესიების მოდელები წარმოადგენენ წრფივ მოდელებს, რამდენადაც F ტემპერატურასა და N დაჭრიჭინების სიხშირეს (რაოდენობა ერთ წუთში) შორის კავშირი წრფივი ფუნქციითაა გამოხატული. რეალურად ეს დამოკიდებულება უფრო რთულია, როგორც ეს ნახ. 2.2.4-დან ჩანს, სადაც ჰორიზონტალურ ღერძზე N-ია გადაზომილი, ვერტიკალურ ღერძზე კი – F. ძმების მიერ ჩატარებული დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ ხალხური ფორმულა მათ ფორმულასთან შედარებით ნაკლებად ზუსტია. უნდა შევნიშნოთ, რომ ტემპერატურის დადგენის ეს მეთოდი შეიძლება გამოყენებული იქნეს მხოლოდ ზაფხულის ბოლოს – შემოდგომის დასაწყისში იმის გათვალისწინებით, რომ ჭრიჭინები მხოლოდ ღამით ჭრიჭინებენ, ამასთან ერთად როცა ტემპერატურა $50^\circ F$-ზე მეტია.

ფარენჰეიტის შკალა არის ტემპერატურული შკალა, რომელშიც ტემპერატურული ინტერვალი ყინულის დნობასა და წყლის დუღილს შორის ნორმალური ატმოსფერული წნევის დროს (ვერცხლისწყლის სვეტის 760 მმ ანუ 101325 პა) დაყოფილია 180 თანაბარ ნაწილად – ფარენჰეიტის გრადუსებად ($^\circ F$), ამავე დროს ყინულის დნობის ტემპერატურად $32^\circ F$, წყლის დუღილის ტემპერატურად კი $212^\circ F$ არის მიღებული. შკალა შემოიღო 1724 წ. გერმანელმა ფიზიკოსმა დ. გ. ფარენჰეიტმა (ფარენჰაიტი, Fahrenheit, 1686 – 1736). ტრადიციულად გამოიყენება ზოგიერთ ქვეყანაში (კერძოდ, აშშ-ში).

ცელსიუსის შკალა არის ტემპერატურული შკალა, რომელშიც ტემპერატურული ინტერვალი ყინულის დნობასა და წყლის დუღილს შორის ნორმალური ატმოსფერული წნევის დროს დაყოფილია 100 თანაბარ ნაწილად – ცელსიუსის გრადუსებად ($^\circ C$), ამავე დროს ყინულის დნობის ტემპერატურად $0^\circ C$, წყლის დუღილის ტემპერატურად კი $100^\circ C$ არის მიღებული. შკალა შემოიღო 1742 წ. შვედმა მეცნიერმა ა. ცელსიუსმა (A. Celsius, 1701 – 1744).



ნახ. 2.2.5

ფარენჰეიტისა და ცელსიუსის შკალებით ტემპერატურებს შორის კავშირის ფორმულა შეიძლება მიღებული იქნას (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებზე გამავალი წრფის (2.2.4) განტოლებით (იხ. ნახ. 2.2.5), თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ წყალი იყინება ფარენჰეიტით $32^\circ F$-ზე და ცელსიუსით – $0^\circ C$-ზე, ე. ი. $(x_1, y_1) = (32\,,0)$, ხოლო დუღს ფარენჰეიტით $212^\circ F$-ზე და ცელსიუსით – $100^\circ C$-ზე, ე. ი. $(x_2, y_2) = (212\,,100)$:

$$\frac{C-100}{0-100}=\frac{F-212}{32-212},$$

საიდანაც

$$C=\frac{100}{180}(F-212)+100=\frac{100}{180}(F-212+180)=\frac{5}{9}(F-32)\ ^{*)}.$$

2.3. წრეწირი

განსაზღვრა. *წრეწირი* ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ $(x\ ,\ y)$ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული იმავე სიბრტყის რაიმე ერთი $(a\ ,\ b)$ წერტილიდან. ამ წერტილს *წრეწირის ცენტრი*, ხოლო მანძილს წრეწირის r რადიუსი ეწოდება.

ორ წერტილს შორის მანძილის (2.1.2) ფორმულის თანახმად

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

საიდანაც კვადრატში აყვანის შემდეგ მივიღებთ წრეწირის

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \tag{2.3.1}$$

განტოლებას.

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ, $A,B,C\in R$. მაშინ

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \tag{2.3.2}$$

განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს ან წრეწირს, ან წერტილს, ან ცარიელ სიმრავლეს.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ სრულ კვადრატამდე შევსების მეთოდი (ეს მეთოდი ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ძველ ბაბილონში):

$$x^2+Ax=x^2+2\left(\frac{A}{2}x\right)=x^2+2\left(\frac{A}{2}x\right)+\frac{A^2}{4}-\frac{A^2}{4}=\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$y^2+By=\left(y+\frac{B}{2}\right)^2-\frac{B^2}{4}.$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი გამოსახულებები (2.3.2)-ში:

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2-\frac{B^2}{4}+C=0,$$

საიდანაც

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=D, \tag{2.3.3}$$

სადაც

$$D=\frac{A^2+B^2}{4}-C.$$

თუ $D>0$, შემოვიღოთ აღნიშვნა $r:=\sqrt{D}$. მაშინ (2.3.3) იქნება r რადიუსიანი წრეწირის განტოლება ცენტრით $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ წერტილში. თუ $D=0$, მაშინ (2.3.3) განტოლება ნიშნავს იმას, რომ ორი არაუარყოფითი რიცხვის ჯამი

---

*) შევნიშნოთ, რომ, კერძოდ,

$$C=F=-40^{\circ}.$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თითოეული მათგანი ნული უნდა იყოს, ე. ი., (2.3.3)-ის ამონახსნი წარმოადგენს ერთ წერტილს კოორდინატებით

$$x=-\frac{A}{2},\ \ y=-\frac{B}{2}.$$

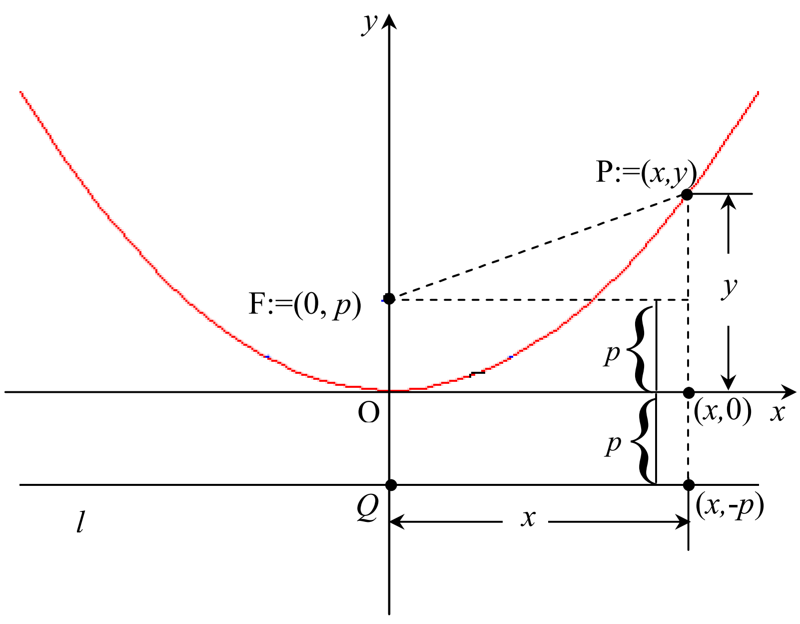
თუ $D<0$, მაშინ არ არსებობს ნამდვილ რიცხვთა (x,y) წყვილი, რომელიც (2.3.3)-ს დააკმაყოფილებს. ამდენად, ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია. ■

2.4. პარაბოლა

ვთქვათ, l წრფეა, ხოლო F წერტილია, რომელიც l-ს არ ეკუთვნის (იხ. ნახ. 2.4.1). l დირექტრისისა და F ფოკუსის მქონე პარაბოლა განიმარტება როგორც ყველა ისეთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული l წრფისა და F წერტილისგან. F წერტილიდან დავუშვათ პერპენდიკულარი l-ზე. გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ Q-თი. FQ მონაკვეთის შუა წერტილი მივიღოთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ $\left(|FO|=|OQ|=:p\right)$ და ჩავთვალოთ, რომ აბსცისათა ღერძი l წრფის პარალელურია. მაშინ l წრფის განტოლებას ექნება $y=-p$ სახე, F წერტილის კოორდინატები იქნება $(0,p)$. ვთქვათ, P წერტილის კოორდინატებია (x,y). დავწეროთ $P:=(x,y)$-დან $F:=(0,p)$-მდე და P-დან l-მდე მანძილების[*)] ტოლობის პირობა:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+[y-(-p)]^2},$$

საიდანაც



ნახ. 2.4.1

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(y+p)^2}.$$

ე. ი., რადგან არაუარყოფითი რიცხვები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი კვადრატები ტოლია,

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

და

$$x^2+y^2-2yp+p^2$$
$$=y^2+2yp+p^2.$$

ამდენად

$$x^2=4py.$$

ეს უკანასკნელი პარაბოლის განტოლებას წარმოადგენს.

თუ კოორდინატთა სისტემის ერთეულად მივიღებთ ფოკუსსა და დირექტრისას შორის მანძილს, გაზრდილს ორჯერ, ე.ი. $4p$-ს, მაშინ ახალ ერთეულებში $4p=1$, ე.ი. $p=\dfrac{1}{4}$. ამიტომ პა-

---

[*)] რაიმე წერტილიდან წრფემდე მანძილი ეწოდება ამ წერტილიდან წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძეს.

რაბოლის განტოლება მიიღებს მარტივ

$$y = x^2$$

სახეს.

თეორემა 2.4.1. ვთქვათ, $A, B, C \in R$, $B \neq 0$, მაშინ

$$x^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (2.4.1)$$

განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს პარაბოლას ვერტიკალური ღერძით.

დამტკიცება. ცხადია,

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + By + C = 0, \qquad (2.4.2)$$

საიდანაც

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = -By - C + \frac{A^2}{4} = -B\left(y - \frac{A^2 - 4C}{4B}\right). \qquad (2.4.3)$$

შემოვიღოთ ახალი კოორდინატთა სისტემა, რომელიც მიიღება ძველი სისტემის პარალელური გადატანით, მაშინ (X, Y) ახალ და (x, y) ძველ კოორდინატებს შორის კავშირი მოიცემა

$$x + \frac{A}{2} = X, \quad y - \frac{A^2 - 4C}{4B} = Y$$

ფორმულებით. ამდენად, ახალი $(X = 0, Y = 0)$ სათავის კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ უნდა გამოვთვალოთ

$$x + \frac{A}{2} = 0 \quad \text{და} \quad y - \frac{A^2 - 4C}{4B} = 0$$

ტოლობებიდან და იქნება

$$\left(-\frac{A}{2}, \frac{A^2 - 4C}{4B}\right).$$

თუ დავუშვებთ, რომ $-B = 4p$ [*)], მაშინ (2.4.3) განტოლება მიიღებს

$$X^2 = 4pY$$

სახეს, რაც სწორედ პარაბოლის განტოლებას წარმოადგენს.

[*)] ფაქტიურად, შემოვიღეთ აღნიშვნა $p := -\frac{B}{4}$.