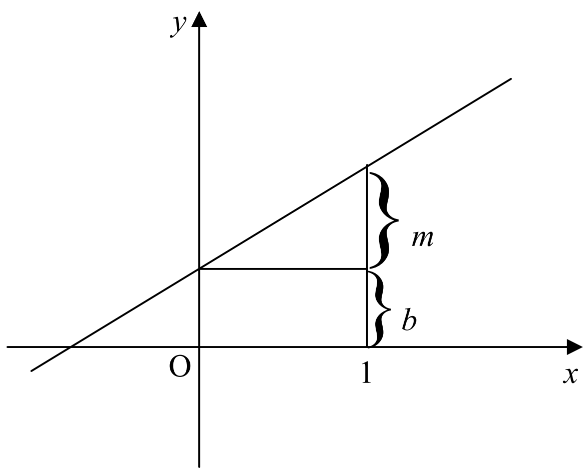
ლექცია 10

6. წარმოებული, ანტიწარმოებული

6.1. ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი, მხები, ნორმალი, მოძრაობის სიჩქარე. რიცხვითი წრეწირი, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცნება, პერიოდული ფუნქციები. ანტიწარმოებული. კატები და სიმძიმის ძალა

განსაზღვრა 6.1.1. ნებისმიერ წრფეს, რომელიც წირს კვეთს, ამ წირის *მკვეთი* ეწოდება.



ნახ. 6.1.1

განსაზღვრა 6.1.2. თუ მკვეთის წირთან თანაკვეთის ორი მეზობელი წერტილიდან ერთ-ერთს მივასწრაფებთ მეორისკენ, მაშინ ზღვრულ მდგომარეობაში მიღებულ წრფეს ამ უკანასკნელ წერტილში წირისადმი *მხები* ეწოდება.

როგორც უკვე ვიცით, წრფის განტოლებას აქვს

$$y = mx + b\,,\;\; m = \text{const}\,,\;\; b = \text{const}$$

სახე, სადაც m-ს წრფის დახრა, ხოლო b-ს y ღერძზე *კვალი* ეწოდება (იხ. ნახ. 6.1.1). ეს ფუნქცია უწყვეტია.

განსაზღვრა 6.1.3. ლაიბნიცის*) განმარტების თანახმად, $y = f(x)$ *ფუნქციის წარმოებული* x_0 წერტილში ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ წერტილში მისდამი გავლებული

$$y = mx + b$$

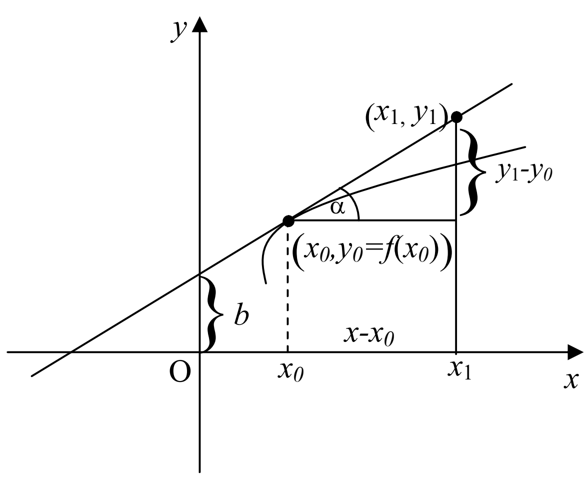
მხების m (იხ. ნახ. 6.1.2) დახრას

$$f'\left(x_0\right) = m\,. \qquad (6.1.1)$$

(6.1.1) შემდეგნაირად იკითხება: „ეფ შტრიხ იქს ნული“. ასეთი ჩაწერა ლაგრანჟს**) ეკუთვნის.

თვით ლაიბნიცმა კი წარმოებული ასე ჩაწერა:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{df\,(x_0)}{dx} = m\,.$$



ნახ. 6.1.2

ნახ. 6.1.2-ზე $y = f(x)$ წირისადმი მხები გავლებულია $\left(x_0, y_0\right)$ წერტილში. რადგან მხები, როგორც წრფე, $\left(x_0, y_0\right)$ და $\left(x_1, y_1\right)$ წერტილებზე გადის, მათ უნდა დააკმაყოფილონ წრფის განტოლება, ე. ი.

$$y_0 = mx_0 + b\,,$$

*) გ. ვ. ლაიბნიცი (1646 –1716) – გერმანელი ფილოსოფოსი-იდეალისტი, მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და გამომგონებელი, იურისტი, ისტორიკოსი, ენათმეცნიერი.

**) ჟ. ლ. ლაგრანჟი (1736-1813) – ფრანგი მათემატიკოსი და მექანიკოსი.

$$y_1 = mx_1 + b.$$

თუ მეორეს გამოვაკლებთ პირველს, მივიღებთ

$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0),$$

საიდანაც წრფის m დახრისთვის მივიღებთ

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \qquad (6.1.2)$$

რაც, (6.1.1)-ის და ნახ.6.1.2-ის გათვალისწინებით, მოგვცემს

$$tg\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0).$$

ამრიგად, (x_1, y_1) წერტილის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ (x_0, y_0) წერტილში $y = f(x)$ *წირისადმი გავლებული მხების*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

განტოლებას.

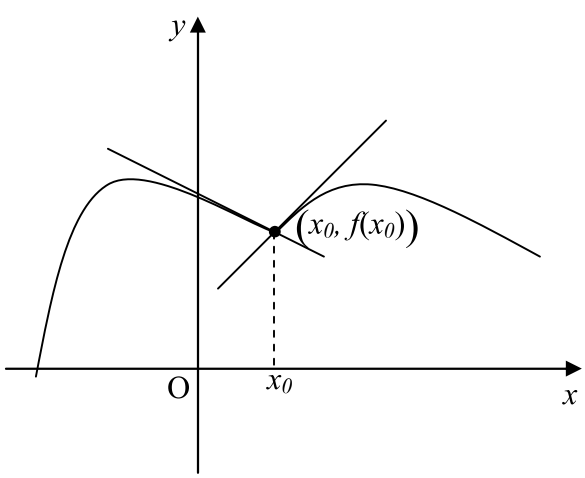
მხებისადმი მართობულ წრფეს (x_0, y_0) წერტილში $y = f(x)$ *წირისადმი გავლებული ნორმალი* ეწოდება. მის განტოლებას ექნება

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

სახე, რამდენადაც ურთიერთმართობი წრფეების დახრების ნამრავლი (-1)-ის ტოლი უნდა იყოს. მართლაც, ჩვენ შემთხვევაში დახრების ნამრავლი

$$-\frac{1}{f'(x_0)} f'(x_0) = -1.$$

ნახ. 6.1.3-ზე აგებული წირი წარმოადგენს უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქციის მაგალითს, რომლის გრაფიკსაც ყველა წერტილში ცალსახად განსაზღვრული მხები აქვს, გარდა $(x_0, f(x_0))$ წერტილისა, სადაც მას ორი მხები აქვს.



ნახ. 6.1.3

თუ ფუნქციის გრაფიკს რაიმე წერტილში არ აქვს ცალსახად განსაზღვრული მხები, მაშინ ფუნქციას არგუმენტის შესაბამისი მნიშვნელობისთვის წარმოებული არ აქვს.

წრფის

$$y = mx + b \qquad (6.1.3)$$

განტოლებაში x-ის კოეფიციენტი (6.1.3) ფუნქციის წარმოებულის ტოლია, რაც უშუალოდ განსაზღვრა 6.1.3-დან გამომდინარეობს, რადგან წრფის ყოველ წერტილში მხები თვით ამ წრფეს ემთხვევა.

ვთქვათ, რაიმე საგანი თანაბრად და სწორხაზოვნად მოძრაობს და ერთი წერტილიდან მეორე წერტილამდე s მანძილი t დროში გაიარა. განვლილი მანძილის დროსთან შეფარდებას სიჩქარე ეწოდება:

$$v = \frac{s}{t}.$$

თუ მოძრაობა არათანაბარია, მაშინ გავლილი მანძილის ამისთვის საჭირო დროსთან შეფარდება გვაძლევს მიახლოებით (საშუალო) სიჩქარეს:

$$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

რაც უფრო მცირეა მოძრაობის $t_2 - t_1$ დრო, მით უფრო ზუსტი იქნება სიჩქარის მნიშვნელობა. ზღვარი კი, როცა $t_2 \to t_1$, ბუნებრივია, t_1 მომენტში „მყისიერი“ სიჩქარის მნიშვნელობად მივიღოთ.

განსაზღვრა 6.1.4. თუ მოცემული გვაქვს $y = f(x)$ ფუნქცია, მისი *წარმოებული* x_0 წერტილში განიმარტება

$$\frac{dy(x_0)}{dx} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} \qquad (6.1.4)$$

ტოლობით, სადაც

$$\Delta y_0 := f(x) - f(x_0)$$

*ფუნქციის ნაზრდია**), ხოლო

$$\Delta x_0 := x - x_0$$

არგუმენტის ნაზრდი.

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

სიდიდეს $y = f(x)$ *ფუნქციის დიფერენციალი* ეწოდება.

თუ $y = f'(x)$-ს განვიხილავთ, როგორც ფუნქციას, მისთვისაც ანალოგიურად შეიძლება განვსაზღვროთ წარმოებული, რომელსაც მეორე რიგის წარმოებული ეწოდება:

$$(f'(x))' = f''(x) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

ანალოგიურად განიმარტება მე-3, მე-4 და ა. შ. უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები.

როგორც განსაზღვრა 6.1.3-დან, ასევე განსაზღვრა 6.1.4-დან გამომდინარეობს, რომ ორივე

$$y = mx, \quad y = mx + b$$

ფუნქციის წარმოებული m-ის ტოლია.

ამავე განმარტებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$y = b$$

ფუნქციის წარმოებული 0-ის ტოლია, ე. ი. მუდმივის წარმოებული 0-ია. მართლაც, $y = b = 0x + b$.

წრფივი ფუნქციის წარმოებული x-ის კოეფიციენტია. კერძოდ, თუ $f(x) = x$, მაშინ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

თუ $f(x) = x^2$, მაშინ

*) უფრო ზუსტად, ფუნქციის მნიშვნელობის ნაზრდია

$$\left(x^2\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2x + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 2x + 0 = 2x .$$

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს x წერტილში აქვს *წარმოებულები* და λ რაიმე მუდმივია, მაშინ

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x) ;$$
$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) ;$$
$$\left(\lambda f(x)\right)' = \lambda' \cdot f(x) + f'(x)\cdot\lambda = 0 + \lambda f'(x) = \lambda f'(x) ,$$

რადგან $\lambda = \text{const}$, ხოლო მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია;

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ როცა } g(x)\neq 0 ,$$

$y = f(x)$ ფუნქციის $x = f^{-1}(y)$ შებრუნებული ფუნქციის წარმოებული

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}, \qquad f'(x)\neq 0 .$$

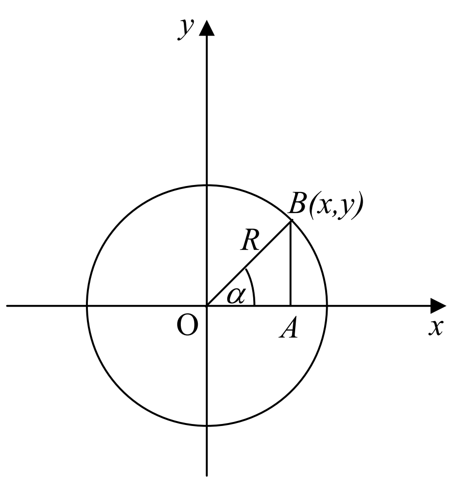
გარდა ამისა,

$$\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1} ; \tag{6.1.5}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad \left(e^x\right)' = e^x . \tag{6.1.6}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} ; \tag{6.1.7}$$

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a}\right)\cdot\left(\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a} . \tag{6.1.8}$$



ნახ. 6.1.4

ვთქვათ, მოცემულია

$$z = f(y), \quad y = g(x)$$

ფუნქციები, ამასთან პირველის განსაზღვრის არე ემთხვევა მეორის მნიშვნელობათა არეს, მაშინ

$$z = (f(g(x))) =: (f\circ g)(x) \text{-ს}$$

რთული ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება შემდეგი

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'g'(x)$$

ფორმულით. გაწარმოების ამ წესს *ჯაჭვის წესი* ეწოდება. ის ცხადი ხდება $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ ტოლობიდან.

ცხადია,

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a} .$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ ჯაჭვის წესს, გვექნება*)

*) ჯაჭვის წესს ვიყენებთ $z = f(y) = e^y$, სადაც $y = g(x) = x\ln a$, რთული ფუნქციის, ე.ი., $z = e^{x\ln a}$ რთული ფუნქციის მიმართ.

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x \cdot \ln a . \qquad (6.1.9)$$

(6.1.9)-ით დამტკიცდა (6.1.6).

განვიხილოთ ერთეულოვანი წრე (იხ. ნახ. 6.1.4). თუ რადიუს-ვექტორს, რომელიც ძევს x ღერძზე დადებითი მიმართულებით, ე.ი. ცენტრის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ვაბრუნებთ, ვიდრე ის თავის საწყის მდგომარეობას არ დაუბრუნდება, მივიღებთ კუთხეს, რომელსაც *სრული კუთხე* ეწოდება. სრული კუთხე იყოფა 360 გრადუსად (360°). 180°-იან კუთხეს *გაშლილი კუთხე* ეწოდება, ხოლო 90°-იან კუთხეს – *მართი.* ცენტრალური კუთხე იზომება რადიანებშიც. ერთი *რადიანის* ტოლი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომლის შესაბამისი რკალი სიგრძით რადიუსის ტოლია. რამდენადაც სრულ კუთხეს მთელი წრეწირის სიგრძე, ე. ი. $2\pi R$ (ერთეულოვანი წრეწირის შემთხვევაში – 2π) შეესაბამება, ამიტომ სრული კუთხე 2π რადიანის ტოლია.

განსაზღვრა 6.1.5. α კუთხის *სინუსი* (sin) ეწოდება (იხ. ნახ. 6.1.4) მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან[*], ხოლო *კოსინუსი* (cos) – მიმდებარე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან (ერთეულოვანი წრის შემთხვევაში – შესაბამისად AB და OA მონაკვეთების სიგრძეს განზომილების გარეშე). *ტანგენსი* (tg) განიმარტება, როგორც მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება მიმდებარე კათეტთან, ხოლო *კოტანგენსი* (ctg) – პირიქით. ამდენად,

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

გამოვთვალოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები. წარმოებულის განმარტების თანახმად,

$$(\sin x)' \equiv \frac{d\sin x}{dx} := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x . \qquad (6.1.10)$$

ანალოგიურად,

---

[*] $B(x,y)$ წერტილს α კუთხის (α ნამდვილი რიცხვის, თუ α რადიანებშია გამოსახული) შესაბამისი წერტილი ეწოდება რიცხვით წრეწირზე (იხ. ნახ. 6.1.4). აქედან გამომდინარე ნებისმიერი α კუთხის (ნამდვილი რიცხვის) სინუსი ეწოდება ამ წერტილის y ორდინატის შეფარდებას რიცხვითი წრეწირის R რადიუსთან: $\sin\alpha = \frac{y}{R}$. ანალოგიურად განიმარტება ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვის სხვა ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიც: $\cos\alpha = \frac{x}{R}$, $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$, $ctg\,\alpha = \frac{x}{y}$.

$$(\cos x)' = -\sin x^{*)}. \tag{6.1.11}$$

შეფარდების წარმოებულის ფორმულის გამოყენებით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{6.1.12}$$

განსაზღვრა 6.1.6. R^1-ზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *პერიოდული ფუნქცია* $l \neq 0$ პერიოდით, თუ ნებისმიერი x-სთვის მართებულია

$$f(x+l) = f(x)$$

ტოლობა.

ცხადია, თუ l $y = f(x)$ ფუნქციის პერიოდია, მაშინ ამ ფუნქციის პერიოდი იქნება $2l,\ 3l,\ \dots,$ $kl,\ k \in N$. დავამტკიცოთ $2l$-სთვის

$$f(x+2l) = f\big((x+l)+l\big) = f(x+l) = f(x).$$

თუ l $y = f(x)$ ფუნქციის პერიოდია, მაშინ $(-l)$-იც არის ამ ფუნქციის პერიოდი. მართლაც,

$$f(x) = f\big((x-l)+l\big) = f(x-l).$$

ე. ი. მივიღეთ, რომ

$$f\big(x+(-l)\big) = f(x),$$

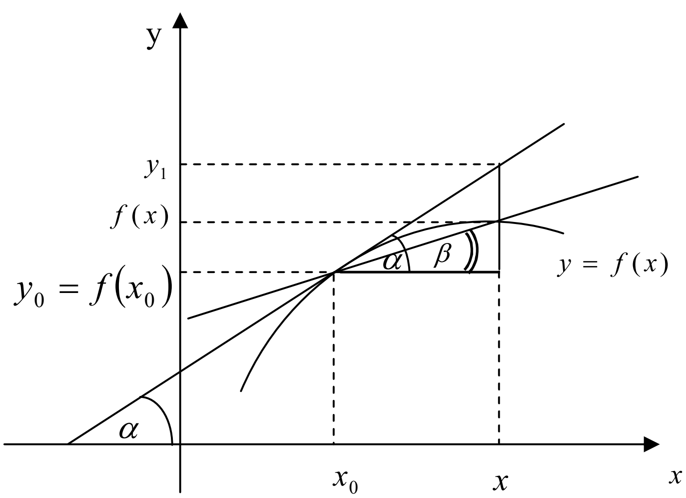
რაც იმას ნიშნავს, რომ $(-l)$ ფუნქციის პერიოდია.

ფუნქციის გამოკვლევის დროს მნიშვნელოვანია ამ ფუნქციის მინიმალური დადებითი პერიოდის მოძებნა. შევნიშნოთ, რომ sin-ისა და cos-ის მინიმალური პერიოდია 2π, tg-ისა და ctg-ის კი – π.

ნახ. 6.1.5-დან და (6.1.4)-დან ცხადია, რომ, რადგან $tg\beta$ უწყვეტია, როცა $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} tg\beta = tg\alpha.$$

ამრიგად, $y = f(x)$ ფუნქციის x_0 წერტილში $f'(x_0)$ წარმოებული ფუნქციის გრაფიკისადმი $(x_0, f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხების მიერ x ღერძთან შედგენილი α კუთხის ტანგენსის ტოლია.



ნახ. 6.1.5

ნახ. 6.1.5-დან და (6.1.2)-დან ასევე ნათელია, რომ

$$tg\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x - x_0} = m,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ წარმოებულის 6.1.3 და 6.1.4 განსაზღვრებები ეკვივალენტურია.

განსაზღვრა 6.1.7. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *ანტიწარმოებული* (*პრიმიტიული, პირველყოფილი, განუსაზღვრელი ინტეგრალი*), თუ

$$F'(x) = f(x). \tag{6.1.13}$$

---

*) თუ გამოვიყენებთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს და (6.1.10)-ს, (6.1.11) შეიძლება ასეც დავამტკიცოთ $(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$

რადგან მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია, ამიტომ $F(x)$-სთან ერთად $F(x)+const$-იც იქნება $f(x)$ ფუნქციის ანტიწარმოებული. ამრიგად, ანტიწარმოებული მუდმივი შესაკრების სიზუსტით განისაზღვრება.

განსაზღვრა 6.1.8. *განსაზღვრული ინტეგრალი* შეიძლება განვმარტოთ შემდეგი ტოლობით:

$$\int_a^b f(x)dx \equiv F(x)\Big|_a^b := F(b)-F(a)\,, \tag{6.1.14}$$

სადაც a-ს და b-ს *ინტეგრების* (*საინტეგრაციო*) *საზღვრები*, x-ს *საინტეგრაციო ცვლადი*, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას *ინტეგრალქვეშა გამოსახულება* ეწოდება (იკითხება შემდეგნაირად: ინტეგრალი ა-დან და ბ-მდე ეფ იქს დე იქსი უდრის ეფ დიდი იქს ჩასმა ა-დან და ბ-მდე).

განსაზღვრა 6.1.9. (6.1.14) ფორმულას *ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა* ეწოდება. ის გამოხატავს $y=f(x)$ წირითა და $x=a$, $x=b$ და $y=0$ წრფეებით შემოსაზღვრული სასრული ფიგურის ფართობს.

(6.1.13) შეიძლება ასეც ჩავწეროთ

$$F(x)=\int f(x)dx+const\,.$$

ლექცია 12-ში ინტეგრალის ცნებას სხვა კუთხით კიდევ ერთხელ დავუბრუნდებით.

(6.1.5)–(6.1.8) და (6.1.10)-(6.1.12) გაწარმოების ფორმულებიდან ადვილად გამომდინარეობს *ანტიწარმოებულების შემდეგი ცხრილი*:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+const,\quad (n\neq -1)\,,\qquad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+const\quad (x\neq 0)\,,$$

$$\int e^x dx=e^x+const\,,\qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+const,$$

$$\int \sin x dx=-\cos x+const\,,\qquad \int \cos x dx=\sin x+const\,,$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tg\,x+const\qquad (x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,...)\,,$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctg\,x+const\qquad (x\neq k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,...)\,,$$

$$\int \ln x dx=x\ln x-x+const\quad (x>0)\,.$$

კატები და სიმძიმის ძალა. კატა ევოლუციის პროცესში ჩამოყალიბდა, როგორც ერთ-ერთი საუკეთესო ძუძუმწოვარი მტაცებელი. მაგალითისთვის, ზოგან შინაურმა კატებმა მგალობელი ჩიტების 60%-იც კი გაანადგურეს. შინაური კატა იმ კატათაგან წარმოიშვა, რომლებიც ხეებზე ნადირობასთან იყვნენ ადაპტირებულნი, რაც უდიდეს მოხერხებულობასა და სისწრაფეს მოითხოვს. აღნიშნულ კატებს ძალიან მოქნილი ხერხემალი აქვთ, რაც მათ მსხვერპლზე დახტომისას წარმოქმნილი დარტყმის ამორტიზირების საშუალებას აძლევს. ამდაგვარი მოქნილობის გამო კატას აქვს ვარდნის პროცესში სწრაფად გადატრიალებისა და მიწაზე ყოველთვის ფეხებით დახტომის უნარი.

ვარდნის პროცესში ტანის სწრაფად გასწორების კატების ამ უნარს ადამიანები ყოველთვის აღტაცებაში მოჰყავდა. კატის ვარდნისადმი მიძღვნილი სამეცნიერო ნაშრომების რაოდენობა მცირეა. ნიუ-იორკის ბინებიდან კატების ვარდნის გამოკვლევამ უჩვენა, რომ მაღალი სართულებიდან გადმოვარდნილი კატები უკეთ ეცემოდნენ მიწაზე, ვიდრე შუა სართულებიდან გადმოვარდნილები. როგორც ჩანს, გადმოვარდნისას კატა ტანს სწრაფადვე ასწორებს, თუმცა მისი სხეული დაძაბული რჩება, მაშინ, როდესაც დიდი სიმაღლიდან გადმოვარდნისას ვარდნის მდგომარეობაში მყოფი კატა დუნდება და ფეხებით იღებს პარაშუტის ფორმას, რაც მცირედად ანელებს სისწრაფეს და

შედეგად დაცემაც უფრო მსუბუქია. საშუალო სიმაღლეებიდან გადმოვარდნისას კატა ძირითადად აღწევს საბოლოო სიჩქარეს (მიზიდულობის ძალისა და ჰაერის წინააღმდეგობის ბალანსის გამო), მაგრამ სხეულის დაძაბულობა და ნაკლები ელასტიურობა ფატალური ან მძიმე დაზიანებების ალბათობას ზრდის.

ვარდნისას ჰაერის წინააღმდეგობის მოდელირების სირთულეების ანალიზი ცდება კურსის მიზნებს, მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია მოვახდინოთ ვარდნისას სიმძიმის ძალით გამოწვეული აჩქარებით მიღებული პირველადი დინამიკის მოდელირება. თუ კატა ხიდან ვარდება, მოძრაობა ხასიათდება სიმძიმის ძალის ძირითადი კანონით. *ნიუტონის*[*)] *მეორე კანონის* თანახმად, მასისა და აჩქარების ნამრავლი ობიექტზე მოქმედი ყველა ძალის ჯამის ტოლია. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, საზოგადოდ, სიჩქარე განვლილი მანძილის წარმოებულია დროით. შევნიშნოთ, რომ აჩქარება (სიჩქარის ცვლილების სიჩქარე) სიჩქარის წარმოებულია დროით. თანაბრადაჩქარებული მოძრაობის დროს სიჩქარე

$$v = v_0 + at, \tag{6.1.15}$$

სადაც v_0 საწყისი (ე.ი. როცა $t=0$) სიჩქარეა, $a = const$ კი აჩქარებაა, ხოლო გავლილი მანძილი (ვგულისხმობთ, რომ საწყის $t=0$ მომენტისათვის გავლილი მანძილი ნულის ტოლია), რომელიც (6.1.15)-ის ინტეგრებით მიიღება,

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

თავისუფალი ვარდნის დროს საწყისი სიჩქარე $v_0 = 0$, ხოლო აჩქარება $a = g \approx 9{,}8$მ/წმ^2-ის ტოლია. ამიტომ ვარდნის დროს t მომენტისათვის გავლილი მანძილი (1 ფუტი 30,48სმ-ის ე.ი. 0,3048მ-ის ტოლია)

$$s = \frac{9{,}8t^2}{2}\text{მ} \approx \frac{32t^2}{2}\text{ფუტს} = 16t^2\text{ფუტს}.$$

თუ სხეული (ჩვენ შემთხვევაში კატა) ვარდება h_0 სიმაღლიდან, მაშინ ვარდნის დაწყების შემდეგ თუ რა სიმაღლეზეა სხეული დროის t მომენტში, მოიცემა

$$h(t) = h_0 - s = h_0 - 16t^2 \tag{6.1.16}$$

ფორმულით, რადგან ის გადმოვარდნის სიმაღლეს გამოკლებული გავლილი მანძილის ტოლია.

ვთქვათ, კატა გადმოვარდა $h_0 = 16$ ფუტის სიმაღლის ტოტიდან. ვარდნისას დროის t მომენტში თუ რა $h(t)$ სიმაღლეზეა, კატა, (6.1.16)-ის თანახმად, განისაზღვრება

$$h(t) = 16 - 16t^2$$

ფორმულით. ცხადია, საწყის $t=0$ მომენტში სიმაღლე

$$h(0) = 16 - 16 \cdot 0^2 = 16.$$

ისმის კითხვა: რა ხნის განმავლობაში ვარდება კატა და რის ტოლია მისი სიჩქარე მიწაზე დანარცხებისას? პირველ კითხვაზე პასუხი ადვილი გასაცემია, რადგან დაცემისას კატა ნულის ტოლ სიმაღლეზეა მიწიდან, ე. ი. ჩვენ უნდა ამოვხსნათ შემდეგი

$$0 = h(t) = 16 - 16t^2$$

განტოლება, საიდანაც

$$16 - 16t^2 = 0, \quad 16t^2 = 16, \quad t^2 = 1, \quad t = 1 \text{ წმ},$$

რადგან დრო დადებითი სიდიდეა. ამდენად, დაცემისას სიჩქარის გამოსათვლელად უნდა ვიპოვოთ ვარდნისას გავლილი მანძილის წარმოებული, როცა $t=1$:

$$v(t) = s'(t) = 16 \cdot 2t = 32t$$

[*)] ი. ნიუტონი (1643-1727) – ინგლისელი ფიზიკოსი და მათემატიკოსი.

და

$$v(t) = 32\,\frac{\text{ფტ}}{\text{წმ}}\,.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ რაც უფრო მეტი სიმაღლიდან ვარდება კატა, მით უფრო მეტი იქნება მისი სიჩქარე დაცემისას. მაგალითად, თუ ვარდება 64 ფუტის სიმაღლიდან, კატის სიჩქარე დაცემისას იქნება 64ფტ/წმ.