ლექცია 1

1. რიცხვები

1.1. ოპერაციები რიცხვებზე. ნამდვილ რიცხვთა ველი

ყოველი ცნება განისაზღვრება უფრო მარტივი ცნებით. ამ პროცესს ბოლოსდაბოლოს მივყავართ იმდენად პირველად ცნებამდე, რომ მისი განსაზღვრა უფრო მარტივი ცნების საშუალებით ვერ ხერხდება. ასეთ ცნებას პირველადი (ძირითადი) ცნება ეწოდება. ის შეიძლება მხოლოდ აღიწეროს და მიიღება განმარტების გარეშე. პირველად ცნებებს განეკუთვნება *სიმრავლის* ცნებაც. მაგალითად, შეიძლება ლაპარაკი: ქართული ანბანის ყველა ასოს სიმრავლეზე; აუდიტორიაში მსხდომ სტუდენტთა სიმრავლეზე; წრეებისა და სამკუთხედების სიმრავლეზე; სიმრავლეზე რომელიც შედგება მზისაგან, მთვარისაგან, რომელიმე ქუჩაზე განლაგებული შენობებისაგან და ფერმაში ქათმებისაგან; რიცხვთა სიმრავლეზე და ა.შ. იმ ობიექტებს, რომელთაგან სიმრავლე შედგება, *სიმრავლის ელემენტები* ეწოდება. სიმრავლეს ეწოდება *ცარიელი სიმრავლე*, თუ ის არცერთ ელემენტს არ შეიცავს. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. ჩანაწერი $A \subset B$ ან $B \supset A$ ნიშნავს იმას, რომ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლესაც ეკუთვნის ე.ი. არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის B–ს და ეკუთვნის A–ს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ „A არის B-ს *ქვესიმრავლე*“. ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა. თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ A და B სიმრავლეები ერთი და იმავე ელემენტებისაგან შედგება. ასეთ შემთხვევაში ვწერთ, რომ $A = B$ და ვამბობთ, რომ A და B *ტოლი სიმრავლეებია.* იმ ფაქტს, რომ x ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს ვწერთ ასე $x \in A$ (x ეკუთვნის A-ს). წინააღმდეგ შემთხვევაში ვწერთ $x \notin A$. $A \setminus B$-თი აღინიშნება A სიმრავლის ყველა იმ (და მხოლოდ იმ) ელემენტის სიმრავლე, რომელიც არ ეკუთვნის B-ს.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტები რიცხვებია.

ნატურალური რიცხვების ცნება ერთ-ერთი პირველადი მათემატიკური ცნებაა. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $N := \{1,2,3,\ldots\}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-ს *ციფრები* ეწოდება.

რიცხვს, გარდა 1-ისა, რომელიც უნაშთოდ იყოფა მხოლოდ 1-ზე და თავის თავზე, *მარტივი რიცხვი* ეწოდება.

რიცხვს, რომელიც 1-ისა და თავის თავის გარდა სხვა რიცხვზეც იყოფა უნაშთოდ, *შედგენილი რიცხვი* ეწოდება.

რიცხვი 1 არც მარტივია და არც შედგენილი.

მთელი რიცხვები ეწოდება $\pm n$ სახის რიცხვებს, სადაც $n \in N$ ან $n = 0$. მთელ რიცხვთა სიმრავლე Z სიმბოლოთი აღინიშნება. $n \in N$-ს ეწოდება *მთელი დადებითი რიცხვი*, ხოლო $-n$-ს ($n \in N$) – *მთელი უარყოფითი რიცხვი.* 0 (ნული) არც დადებითია და არც უარყოფითი.

$2n$, $n \in N$, სახის რიცხვებს *ლუწი რიცხვები*, ხოლო $2n-1$, $n \in N$, სახის რიცხვებს *კენტი რიცხვები* ეწოდება.

რაციონალური რიცხვები ეწოდება $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვებს, სადაც $m \in Z$ და $n \in N$. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე Q სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ $m \in N$ და $m < n$, მაშინ $\frac{m}{n}$ რიცხვს *წესიერი წილადი* ეწოდება, ხოლო როცა $m \geq n$ – *არაწესიერი წილადი.* თუ $n = 10^k$, $k \in N$, მას *ათწილადი* ეწოდება.

უსასრულო ათწილადს, რომლის ერთი ან რამდენიმე ციფრი უცვლელად მეორდება ერთი და იმავე მიმდევრობით, *პერიოდული ათწილადი* ეწოდება.

უსასრულო პერიოდული ათწილადი წარმოადგენს რაციონალურ რიცხვს[*)] და, პირიქით, ყოველი რაციონალური რიცხვი წარმოიდგინება სასრული ათწილადით ან უსასრულო პერიოდული ათწილადით.

უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს $a,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ *ირაციონალური რიცხვი* ეწოდება. აღვნიშნოთ მათი სიმრავლე I სიმბოლოთი.

რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს ერთად *ნამდვილი რიცხვები* ეწოდებათ. მათი სიმრავლე R სიმბოლოთი აღინიშნება. ის შედგება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტებისაგან. საერთოდ, ორი ან *რამდენიმე სიმრავლის გაერთიანება* ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც ამ სიმრავლეთა ყველა ელემენტისაგან შედგება. ამდენად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა *სიმრავლეების გაერთიანებას*, რაც ასე აღინიშნება $R = I \bigcup Q$. ორი ან *რამოდენიმე სიმრავლის თანაკვეთა* ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც ყველა იმ ელემენტისგან შედგება, რომელიც ყველა ამ სიმრავლეს ეკუთვნის. მაგალითად,

$$A := \left\{-2,\, 10,\, \frac{1}{2}\right\}$$

და

$$B := \left\{1,\, -2,\, \frac{4}{5},\, 10\right\}$$

სიმრავლეების თანაკვეთა

$$C := \{-2,\ 10\}$$

სიმრავლეა, რაც ასე ჩაიწერება

$$C = A \bigcap B$$

(სიმბოლო $:=$ “აღნიშვნას” აღნიშნავს).

ვთქვათ, A, B და C რაიმე სიმრავლეებია. მაშინ სამართლიანია ქვემოთ მოყვანილი ოთხი მტკიცება.

I. თუ $A \subset C$ და $B \subset C$, მაშინ $(A \bigcup B) \subset C$.

მართლაც, ყოველი $a \in A \bigcup B$ ელემენტი ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც A და B წყვილიდან, რომელთაგან თითოეული C-ს ქვესიმრავლეა. ამიტომ $a \in C$ (იხ. ნახ. 1.1.1, I).

II. თუ $A \subset B$ და $A \subset C$, მაშინ $A \subset (B \bigcap C)$.

მართლაც, ყოველი $a \in A$, ჩვენ პირობებში, B და C სიმრავლეების საერთო ელემენტიცაა (იხ. ნახ. 1.1.1, II).

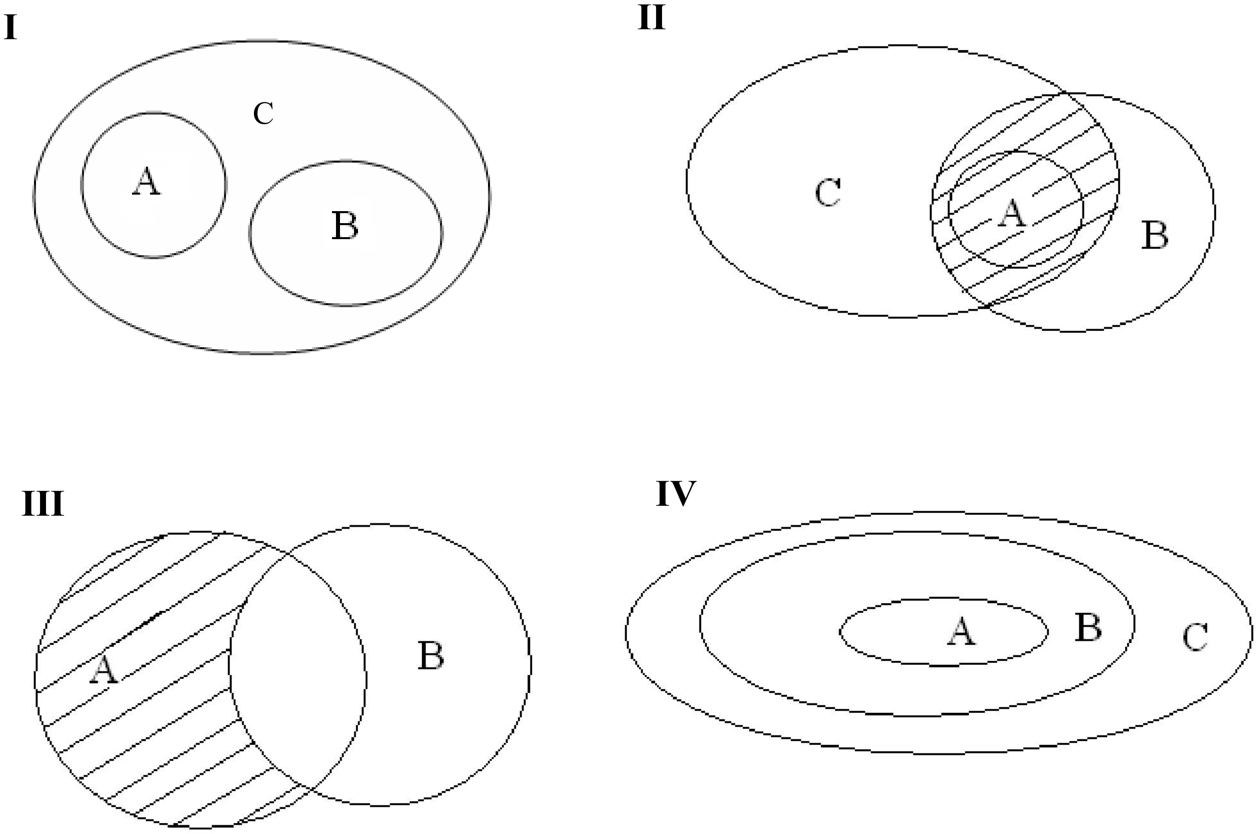
III. $A \subset (A \setminus B) \bigcup B$.

მართლაც, $A \setminus B$ ნიშნავს, რომ A-დან ამოვიღეთ B-ს ყველა ის ელემენტი, რომელიც A-საც ეკუთვნოდა. $A \setminus B$-ს გაერთიანება B-სთან კი ნიშნავს იმას, რომ $A \setminus B$-სთან გავაერთიანოთ B-ს ყველა ელემენტი, მათ შორის, B-ს ის ელემენტებიც, რომლებიც ამოვყარეთ A-დან. ამდენად, $(A \setminus B) \bigcup B$ შეიცავს A-ს ყველა ელემენტს და B-ს იმ ელემენტებსაც, რომლებიც A-ს არ ეკუთვნის, ე.ი., საზოგადოდ, $(A \setminus B) \bigcup B \neq A$ (იხ. ნახ. 1.1.1, III).

IV. ცხადია, თუ $A \subset B$ და $B \subset C$, მაშინ $A \subset C$ (იხ. ნახ. 1.1.1, IV).

დადებითი წილადი რიცხვები ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ბაბილონისა და ეგვიპტის უძველესი ცივილიზაციებისთვის. ვარაუდობენ, რომ 0 ინდოელებმა შემოიღეს, ხოლო უარყოფითი რაციონალური რიცხვები – იტალიელებმა აღორძინების ხანაში (XIV-XVI სს.).

[*)] შეიძლება დამტკიცდეს უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის (იხ. §5.2) ჯამის ფორმულის გამოყენებით.



ნახ. 1.1.1

x *რიცხვის მთელი ნაწილი* (აღვნიშნოთ $[x]$ სიმბოლოთი) ეწოდება უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც x-ს არ აღემატება. x *რიცხვის წილადი ნაწილი* (აღვნიშნოთ $\{x\}$ სიმბოლოთი) ეწოდება $x-[x]$ სხვაობას.

ალგებრის ყველა წესი შეიძლება მიღებული იქნეს შემდეგი 12 აქსიომიდან (კანონიდან).

1. ყოველი a და b რიცხვისთვის არსებობს ერთადერთი რიცხვი, რომელსაც ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $a+b$ სიმბოლოთი.
2. $a+b=b+a$ (შეკრების კომუტაციურობა)[*)].
3. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (შეკრების ასოციაციურობა).
4. არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელიც აღინიშნება სიმბოლოთი 0[**)], ისეთი, რომ $a+0=a$. მას "ნული" ეწოდება.
5. ყოველი a-სთვის არსებობს ერთადერთი რიცხვი $-a$, რომელსაც a-ს მოპირდაპირე ეწოდება, ისეთი, რომ $a+(-a)=0$.

[*)] "=" ნიშნავს ორი გამოსახულების ტოლობას, რომელიც ხასიათდება შემდეგი სამი აქსიომით: 1. $a=a$ (რეფლექსურობა); 2. თუ $a=b$, მაშინ $b=a$ (სიმეტრიულობა); 3. თუ $a=b$ და $b=c$, მაშინ $a=c$ (ტრანზიტულობა). $a+b=a+b$ ტოლობიდან, რადგან $a=a$, გამომდინარეობს, რომ ერთიდაიგივე b სიდიდის ტოლობის ორივე მხარისათვის დამატება ტოლობას არ არღვევს (იხ. აგრეთვე დალაგების აქსიომები ლექცია 2-ში).

[**)] "ნული" ერთადერთია. მართლაც, თუ არსებობს მეორე "ნული" $0'$, მაშინ $a+0'=a$. ამდენად, კერძოდ, გვექნება ორი ტოლობა $0+0'=0$ და $0'+0=0'$. საიდანაც შეკრების კომუტაციურობისა და ტოლობის ტრანზიტულობის გამო დავასკვნით, რომ $0'=0$.

6. ყოველი a და b რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ერთადერთი რიცხვი, რომელსაც a და b რიცხვების ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება ან $a \times b$, ან $a \cdot b$, ან ab სიმბოლოთი.
7. $ab = ba$ (ნამრავლის კომუტაციურობა).
8. $(ab)c = a(bc)$ (ნამრავლის ასოციაციურობა).
9. $a(b+c) = ab + ac$ (დისტრიბუციულობა).
10. არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელიც აღინიშნება სიმბოლოთი 1[*], ისეთი, რომ $1 \cdot a = a$. მას "ერთიანი" ეწოდება.
11. $1 \neq 0$.
12. $a \neq 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ერთადერთი რიცხვი, რომელსაც a-ს შებრუნებული ეწოდება და აღინიშნება a^{-1} სიმბოლოთი, ისეთი, რომ $a\left(a^{-1}\right) = 1$.

1-12 აქსიომებს ველის აქსიომები ეწოდება. რამდენადაც ყველა ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობა (სიმრავლე) აკმაყოფილებს ამ აქსიომებს, მას *ნამდვილ რიცხვთა ველი* ეწოდება. საერთოდ, ველს ქმნის ნებისმიერი ბუნების (აბსტრაქტული) ობიექტების სიმრავლე, რომლის ელემენტებიც აკმაყოფილებენ ველის 1-12 აქსიომებს.

ვიტყვით, რომ M სიმრავლეზე განსაზღვრულია *ბინარული ალგებრული ოპერაცია*, თუ M სიმრავლის ელემენტთა ყოველ დალაგებულ (a,b) წყვილს ეთანადება ამავე M სიმრავლის ერთადერთი c ელემენტი.

ელემენტთა არაცარიელ სიმრავლეს, რომელზედაც განსაზღვრულია ერთი ან რამდენიმე ბინარული ალგებრული ოპერაცია, რომლებიც გარკვეულ აქსიომებს აკმაყოფილებენ, *ალგებრული სტრუქტურა* ეწოდება.

როგორც ვხედავთ ნამდვილ რიცხვთა ველი წარმოადგენს ალგებრულ სტრუქტურას ორი ბინარული ოპერაციით (შეკრება და გამრავლება)[**].

შევთანხმდეთ, რომ $b - a := b + (-a)$, $b : a \equiv \dfrac{b}{a} := b(a^{-1})$, როცა $a \neq 0$.

როგორც აღვნიშნეთ, ალგებრის ყველა წესი შეიძლება მიღებული იქნას ველის 1-12 აქსიომებიდან (კანონებიდან). მართლაც, აქსიომების გამოყენებით ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

1. $-0 = 0$;
2. $-(-a) = a$;
3. $a + x = b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = b - a$ (გამოკლება);
4. თუ $a \neq 0$, მაშინ $ax = b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = ba^{-1} = \dfrac{b}{a}$ (გაყოფა);
5. $0 \cdot a = 0$;
6. თუ $ab = 0$, მაშინ ან $a = 0$, ან $b = 0$ (შეკვეცის კანონი), ან ორივე 0-ის ტოლია;

---

[*] "ერთიანი" ერთადერთია. მართლაც, თუ არსებობს მეორე "ერთიანი" $1'$, მაშინ $1' \cdot a = a$. ამდენად, კერძოდ, გვექნება ორი ტოლობა $1' \cdot 1 = 1$ და $1 \cdot 1' = 1'$. საიდანაც ნამრავლის კომუტაციურობისა და ტოლობის ტრანზიტულობის გამო დავასკვნით, რომ $1' = 1$.

[**] ალგებრულ სტრუქტურას 1-6, 8, 9 აქსიომებით რგოლი ეწოდება. თუ სამართლიანია მე-7 აქსიომაც, მას კომუტაციური რგოლი ეწოდება. თუ მე-10 აქსიომაც სრულდება (ე.ი. კომუტაციური ერთეულიანი რგოლია) და მე-12 აქსიომაც სრულდება მას ველი ეწოდება.

ალგებრულ სტრუქტურას ჯგუფი ეწოდება, თუ მასზე განსაზღვრულია ერთი ბინარული ალგებრული ოპერაცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს: 1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$; 2. $a \circ e = e \circ a = a$;

3. $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. თუ დამატებით $a \circ b = b \circ a$, მას კომუტაციური ჯგუფი ეწოდება. თუ მასზე განსაზღვრულ ოპერაციას შეკრებას ან გამრავლებას ვუწოდებთ, მაშინ მას, შესაბამისად, ადიციურ ან მულტიპლიკაციურ ჯგუფს ვუწოდებთ. თუ მხოლოდ ერთი (პირველი) აქსიომა სრულდება, მაშინ მას ნახევარჯგუფი ეწოდება.

7. $(-a)b=-ab$, $(-a)(-b)=ab$.

დავამტკიცოთ 1-7 მტკიცებები.

1. -0, როგორც 0-ის მოპირდაპირე, მე-5 კანონის თანახმად, ისეთი ერთადერთი $x=-0$ რიცხვია, რომლისთვისაც $0+x=0$, მაგრამ მე-4 აქსიომის ძალით, $0+0=0$, ამდენად, ერთადერთი x რიცხვი ერთდროულად -0-ის ტოლიცაა და 0-ის ტოლიცაა. ეს კი, ტოლობის ტრანზიტულობის გამო, მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა $-0=0$. სხვანაირად, $0=0+(-0)=-0+0=-0$ [*]).

2. მე-5 აქსიომის თანახმად, ერთი მხრივ, არსებობს ერთადერთი $\left[-(-a)\right]$ ისეთი, რომ

$$(-a)+\left[-(-a)\right]=0\,, \tag{1.1.1}$$

ხოლო მეორე მხრივ,

$$a+(-a)=0\,.$$

თუ ამ უკანასკნელის მიმართ გამოვიყენებთ მე-2 აქსიომას, მივიღებთ, რომ

$$(-a)+a=0\,. \tag{1.1.2}$$

თუ (1.1.1) ტოლობის ორივე მხარეს დავამატებთ a-ს, რითაც ტოლობა არ ირღვევა, მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარეში (1.1.2)-ის გათვალისწინებით, დავასკვნით, რომ

$$-(-a)=a\,.$$

3. თუ $a+x=b$, მაშინ $(a+x)+(-a)=b+(-a)$; მაგრამ ერთი მხრივ, განმარტების თანახმად, $b+(-a)=b-a$ და, ამდენად, $(a+x)+(-a)=b-a$, ხოლო; მეორე მხრივ, მე-2, მე-3, მე-5 და მე-4 აქსიომების ძალით,

$$(a+x)+(-a)=(x+a)+(-a)=x+\left[a+(-a)\right]=x+0=x\,;$$

ამრიგად, $x=b-a$ და აუცილებლობა ("მაშინ") დამტკიცებულია, ხოლო თუ $x=b-a$, მაშინ $x+a=b-a+a$, საიდანაც, მე-2 და მე-5 აქსიომის თანახმად, $a+x=b$ და საკმარისობა ("მხოლოდ მაშინ") დამტკიცებულია.

4. ვთქვათ, $a\neq 0$ და $ax=b$; მაშინ ორივე მხარის (a^{-1})-ზე გამრავლებით და მე-7, მე-8, მე-12 და მე-10 აქსიომების გათვალისწინებით,

$$ba^{-1}=(ax)a^{-1}=(xa)a^{-1}=x(aa^{-1})=x\cdot 1=1\cdot x=x\,,$$

საიდანაც $x=ba^{-1}$ (აუცილებლობა); თუ $x=ba^{-1}$, მაშინ ორივე მხარის a-ზე გამრავლებით და მე-7, მე-8, მე-12 და მე-10 აქსიომების გათვალისწინებით,

$$ax=a\left(ba^{-1}\right)=a\left(a^{-1}b\right)=\left(aa^{-1}\right)b=1\cdot b=b \quad \text{(საკმარისობა)};$$

5. თუ მე-9 აქსიომას გამოვიყენებთ $c=0$ შემთხვევაში, მე-7 აქსიომის თანახმად გვექნება, რომ, ერთი მხრივ, $a(b+0)=ab+a0=ab+0a$; მეორე მხრივ, მე-4 აქსიომის ძალით, $a(b+0)=ab$, ამდენად, ტოლობის ტრანზიტულობის თანახმად, $ab+0a=ab$; მე-3 მტკიცებისა და მე-5-ე აქსიომის შესაბამისად კი

$$0a=ab-ab=ab+(-ab)=0\,.$$

6. ვთქვათ, $b\neq 0$, $ab=0$, მაშინ $(ab)b^{-1}=a\left(bb^{-1}\right)=a\cdot 1=a=0$, რადგან მე-5 მტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ $ab=0$, მაშინ $(ab)c=0\cdot c=0$ ყველა c-სთვის, კერძოდ, $c=b^{-1}$-თვის.

7. რადგან ტოლობის ორივე მხარისათვის ერთიდაიგივე სიდიდის დამატება ტოლობას არ არღვევს, $(-a)b=-ab$ ნიშნავს იმას, რომ $ab+(-ab)=ab+[(-a)b]=0$ (ცხადია, თუ სრულდება ეს უკანასკნელი, შესრულდება პირველიც), რაც მართლაც ასეა, რადგან მე-9 და მე-5 აქსიომების თანახმად,

$$ab+\left[(-a)b\right]=\left[a+(-a)\right]b=0\cdot b=0\,,$$

[*]) აქ ჯერ (პირველი ტოლობა) გამოვიყენეთ 0-ის მოპირდაპირე რიცხვის (-0)-ის განმარტება, შემდეგ – (მეორე ტოლობა) შეკრების კომუტაციურობა, ბოლოს – (მესამე ტოლობა) ნულის არსებობის აქსიომა.

სადაც ბოლო ნაბიჯი გამომდინარეობს მე-5 მტკიცებიდან; $(-a)(-b)=ab$ კი გამომდინარეობს ახლახან დამტკიცებულიდან და მეორე მტკიცებიდან:

$$(-a)(-b)=-\left[a(-b)\right]=-\left[(-b)a\right]=-(-ba)=-(-b)a=ba=ab\,.$$

ველზე სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd},\quad \text{თუ}\quad bd\neq 0;$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \text{თუ}\quad bd\neq 0;$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},\quad \text{თუ}\quad bdc\neq 0;$$

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},\quad \text{თუ}\quad b\neq 0;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a},\quad \text{თუ}\quad ab\neq 0.$$

მართლაც,

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=ab^{-1}\pm cd^{-1}=(ab^{-1}\pm cd^{-1})[(bd)(bd)^{-1}]=[(ab^{-1}\pm cd^{-1})(bd)](bd)^{-1}$$

$$=[(ab^{-1})(bd)\pm(cd^{-1})(bd)](bd)^{-1}=(ad\pm cb)(bd)^{-1}=\frac{ad\pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=(ab^{-1})(cd^{-1})=a\left[b^{-1}\left(cd^{-1}\right)\right]=a\left[b^{-1}\left(d^{-1}c\right)\right]=a\left[(b^{-1}d^{-1})c\right]=a[(bd)^{-1}c]=a[c(bd)^{-1}]=(ac)(bd)^{-1}=\frac{ac}{bd},$$

რადგან $(bd)^{-1}=b^{-1}d^{-1}$ (მართლაც, $(bd)(d^{-1}b^{-1})=b(dd^{-1})b^{-1}=bb^{-1}=1,$ ამდენად $b^{-1}d^{-1}$ არის bd -ს შებრუნებული, ე.ი. $(bd)^{-1}$);

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ab^{-1}}{cd^{-1}}\cdot\frac{bd}{bd}=\frac{(ab^{-1})(bd)}{(cd^{-1})(bd)}=\frac{a(b^{-1}b)d}{c(d^{-1}d)b}=\frac{ad}{bc};$$

მტკიცება 7-ის პირველი ტოლობის თანახმად,

$$\frac{-a}{b}=(-a)b^{-1}=-ab^{-1}=-\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{-b}=a(-b)^{-1}=a(-b^{-1})=-ab^{-1}=-\frac{a}{b},$$

რადგან, თუ $b\neq 0,$ მაშინ $(-b)(-b^{-1})=bb^{-1}=1$ (იხ. მტკიცება 7, მეორე ტოლობა), ამიტომ $(-b)^{-1}=-b^{-1}$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=(ab^{-1})^{-1}=a^{-1}(b^{-1})^{-1}=a^{-1}b=ba^{-1}=\frac{b}{a},$$

რადგან შებრუნებულის ერთადერთობიდან და

$$(b^{-1})(b^{-1})^{-1}=1,\qquad b^{-1}b=1,$$

ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(b^{-1})^{-1}=b.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები (ახარისხება)

$$a^1:=a\,,\;\; a^2:=a\cdot a\,,\;\; a^3:=a\cdot a^2\;\;\text{და ა. შ.};$$

თუ $a\neq 0$, ჩავთვალოთ, რომ

$$a^0=1\,;$$

რადგან

$$a^{-1} := \frac{1}{a},$$

ვწერთ, რომ

$$a^{-2} := \left(a^{-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}, \; a^{-3} = \frac{1}{a^3} \text{ და ა. შ.;}$$

გამოსახულებებს 0^0, 0^{-1}, 0^{-2} და ა. შ. არავითარ აზრს არ ვანიჭებთ; ახარისხების ცნებისა და ველის აქსიომების გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$(ab)^n = a^n b^n, \; a^{n+m} = a^n a^m, \; \left(a^n\right)^m = a^{nm},$$

სადაც $n, m \in Z$ და $a = 0$-სა და $b = 0$-ს გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევაში, როცა შესაბამისი გამოსახულებები აზრს კარგავენ.

$a \in R$ არაუარყოფითი რიცხვიდან n-ური ხარისხის *არითმეტიკული ფესვი* $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ ეწოდება იმ არაუარყოფითი რიცხვს, რომელიც, აყვანილი n ხარისხში, გვაძლევს a-ს:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a .$$

შემოვიღოთ შემდეგი განმარტება

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} .$$