GEORGIAN MECHANICAL UNION

საქართველოს მექანიკოსთა კავშირი

VIII ANNUAL MEETING

OF THE GEORGIAN MECHANICAL UNION

საქართველოს მექანიკოსთა კავშირის
VIII ყოველწლიური საერთაშორისო
კონფერენცია

BOOK OF ABSTRACTS

მოხსენებათა თეზისები

27.09 – 29.09.2017, TBILISI

27.09 – 29.09.2017, თბილისი

Dedicated to the 110th Birthday Anniversary of Ilia Vekua

ეძღვნება ილია ვეკუას
დაბადებიდან 110 წლისთავს

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ISSN 2233-355X

ORGANIZERS:

- I. Javakhishvili Tbilisi State University
  - I. Vekua Institute of Applied Mathematics
  - Faculty of Exact and Natural Sciences
- Georgian Mechanical Union
  - Georgian National Committee of Theoretical and Applied Mechanics
- Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics

SCIENTIFIC COMMITTEE:

CHAIR: Jaiani, George (Georgia)

MEMBERS:

Aptsiauri, Amirani (Georgia)
Chinchaladze, Natalia (Georgia)
Davitashvili, Teimuraz (Georgia)
Gabrichidze, Guram (Georgia)
Gilbert, Robert (USA)
Gulua, Bakuri (Georgia)
Kapanadze, George (Georgia)
Kikvidze, Omar (Georgia)
Kipiani, Gela (Georgia)
Kvitsiani, Tariel (Georgia)
Makhviladze, Nodar (Georgia)
Megrelishvili, Zurabi (Georgia)
Meunargia, Tengizi (Georgia)
Müller, Wolfgang H. (Germany)
Pataraia, David (Georgia)
Phartskhaladze, Gaioz (Georgia)
Shavlakadze, Nugzar (Georgia)
Shrivastava, Suresh (Canada)
Vashakmadze, Tamaz (Georgia)

ORGANIZING COMMITTEE:

CHAIR: Jaiani, George
VICE-CHAIRS: Nikoloz Avazashvili, Natalia Chinchaladze, Gela Kipiani

MEMBERS:

Mariam Beriashvili
Miranda Gabelaia
Bakuri Gulua
Roman Janjgava
George Nozadze
Archil Papukashvili
Mikheil Rukhaia
Mary Sharikadze
Manana Tevdoradze
Varden Tsutskiridze

TOPICS OF THE MEETING:

- Solid Mechanics
- Fluid Mechanics
- Solid-Fluid Interaction Problems
- Applied Mechanics
- Technical Mechanics
- Related Problems of Analysis

CONFERENCE WEB-PAGE:

http://www.viam.science.tsu.ge/others/gnctam/annual8.htm

ორგანიზატორები:

- ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
  - ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი
  - ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
- საქართველოს მექანიკოსთა კავშირი
  - საქართველოს ეროვნული კომიტეტი თეორიულ და გამოყენებით მექანიკაში
- თბილისის საერთაშორისო ცენტრი მათემატიკასა და ინფორმატიკაში

საერთაშორისო სამეცნიერო კომიტეტი:

თავმჯდომარე: ჯაიანი გიორგი

წევრები:

აფციაური ამირანი
გაბრიჩიძე გურამი
გულუა ბაკური
დავითაშვილი თეიმურაზი
ვაშაყმაძე თამაზი
კაპანაძე გიორგი
კვიციანი ტარიელი
კიკვიძე ომარი
მახვილაძე ნოდარი
მეგრელიშვილი ზურაბი
მეუნარგია თენგიზი
მიულერი ვოლფგანგი (გერმანია)
პატარაია დავითი
ფარცხალაძე გაიოზი
ყიფიანი გელა
შავლაყაძე ნუგზარი
შრივასტავა სურეში (კანადა)
ნატალია ჩინჩალაძე
ჯილბერტი რობერტი (აშშ)

საორგანიზაციო კომიტეტი:

თავმჯდომარე: ჯაიანი გიორგი

თავმჯდომარის მოადგილეები: ავაზაშვილი ნიკოლოზი, ყიფიანი გელა, ჩინჩალაძე ნატალია

წევრები:

ბერიაშვილი მარიამი
გაბელაია მირანდა
გულუა ბაკური
თევდორაძე მანანა
ნოზაძე გიორგი
პაპუკაშვილი არჩილი
რუხაია მიხეილი
შარიქაძე მერი
ცუცქირიძე ვარდენი
ჯანჯღავა რომანი

კონფერენციის თემატიკა:

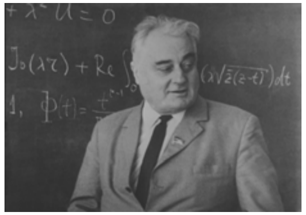
- მყარ დეფორმად სხეულთა მექანიკა
- ჰიდროაერომექანიკა
- დრეკად მყარ და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ამოცანები
- გამოყენებითი მექანიკა
- ტექნიკური მექანიკა
- ანალიზის მონათესავე საკითხები

კონფერენციის ვებ-გვერდი:

http://www.viam.science.tsu.ge/others/gnctam/annual8.htm

LIFE, ACTIVITIES, AND SCIENTIFIC HERITAGE OF ILIA VEKUA

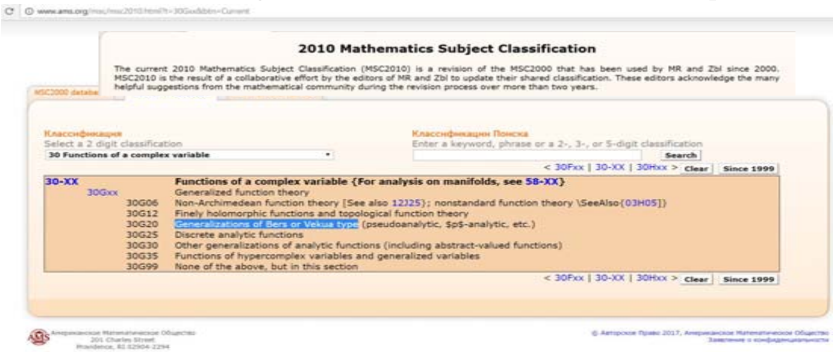
George Jaiani
Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics
& Department of Mathematics
of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University
george.jaiani@gmail.comyge



Ili Vekua

The present talk is devoted to a concise survey of scientific, pedagogical, and educational activities of the outstanding Georgian mathematician and mechanist Ilia Vekua. Biographical data are also given.

If we look through the Mathematical Subject Classification, we find Ilia Vekua's name among the names of a few outstanding mathematicians and mechanists of the world: "30G20 – Generalizations of Bers and Vekua type (pseudoanalytic, p-analytic, etc, functions). It's remarkable that only Ilia Vekua has such an honour amidst Georgian scientists. In this connection we quote here



an outstanding American mathematician L. Bers: "While "Vekua's generalized analytic functions" are basically the same as my "pseudoanalytic functions", our motivation and our aims were somewhat different".

I.Vekua's parents:
Liza (Memu) Apshilava and
Nestor Vekua

Vekua's Parents house in
Shesheleti

Ilia Vekua in
1925

Ilia Vekua was born on April 23rd, 1907 in a picturesque region of Georgia, in Abkhazia, namely in the district Samurzakano in the village Shesheleti. After finishing a secondary school in the capital of another ravishing region of Georgia Samegrelo, Zugdidi, in 1925 Ilia Vekua was enrolled at the Faculty of Physics and Mathematics of the Tbilisi State University (TSU).

Tbilisi State University

Ilia Vekua and Nikoloz Muskhelishvili

A.N. Krylov

He graduated from the university with honours in 1930 and, having the recommendation of academician Nikoloz Muskhelishvili, left Tbilisi for Leningrad (former and present Saint-Petersburg) and became Ph.D. student of the well-known mathematician and mechanist A.N. Krylov.

The first works of Ilia Vekua were devoted to the torsion and bending of elastic bars and propagation of electric waves in an infinite layer with parallel plane boundaries. These results subsequently formed his Ph.D thesis "Propagation of Elastic Oscillations in an Infinite Layer" which he successfully defended at the age of 29.

Ilia Vekua
at the age of 29

Ilia Vekua
at the age of 32

When he was 32 years old, Ilia Vekua received Doctor of Science degree (A Complex Representation of Solutions of Elliptic Equations and its Application to Boundary Value Problems). At the age of 39 he became a member of the Georgian Academy of Sciences and a corresponding member of the Soviet Academy of Sciences. In 1958 he was elected a member (academician) of the Soviet Academy of

Ilia Vekua and
Nikoloz Muskhelishvili

Ilia Vekua with the first
graduates of Novosibirsk
State University

Sciences.

Ilia Vekua was one of the enthusiastic founders of the Razmadze Mathematical Institute, Novosibirsk State University and its first

I.Vekua Institute of
Applied Mathematics

First Council of the Institute
of Applied Mathematics

Rector, the founder and the first director of the Institute of Applied Mathematics of the Tbilisi State University until his decease in 1977.

Computer's room of the Institute of Applied
Mathematics (BESM-6/7)

Now it is called I.Vekua Institute of Applied Mathematics of TSU.

At different times he was a Rector of TSU, the second (after N. Muskhelishvili) President of the Georgian Academy of Sciences, Professor of Lomonosov Moscow State University, etc.

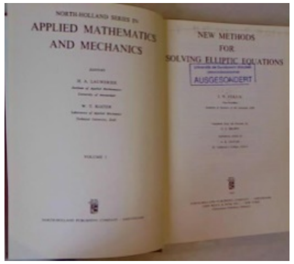
I. Javakhishvili Tbilisi
State University

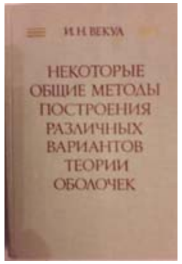
M. Lomonosov
Moscow State
University

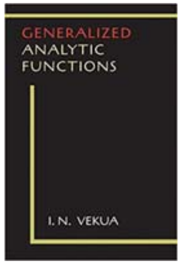
Georgian National
Academy of
Sciences

Scientific studies of Ilia Vekua as a rule start with problems of Mechanics, continue by fundamental investigations in Complex Analysis, Integral and Partial Differential equations and are crowned with applications to Mechanics. Results of Ilia Vekua, published in leading scientific journals, were summarized in consequent monographs, published in Russian, English, German, Chinese (later also Georgian), and other languages. The most important of his monographs were:

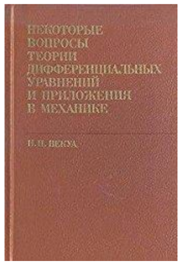
New Methods of Solving Elliptic Equations (1948), Generalized Analytic Equations (1948), Generalized Analytic functions (1959), Shell Theory: General Methods of Constructing (first published Russian after his decease in 1982 under the slightly different title),

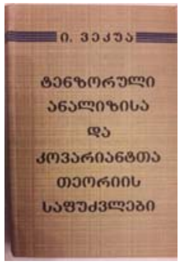






then in 1985 by Pitman Advanced Publishing Program, and in 2007 by the Tbilisi University Press in Georgian. All these monographs were awarded by different state prizes.






David Hilbert

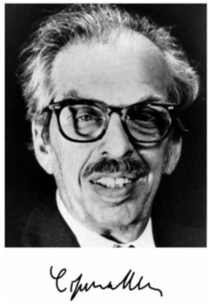
Richard Courant and David Hilbert in their well-known book "Methods of Mathematical Physics" were skeptical about the use of general complex representations of solutions of PDEs. Later, Courant confessed that the above opinion was totally wrong and it was proved by Vekua's methods developed on the basis of general complex representations.

Now, I'd like to quote the following extract from the foreword of Gaetano Fichera to the English edition of I. Vekua's book in shell theory: "The present monograph by I.N. Vekua, which is now offered


Ricard Courand and Ilia Vekua


Ilia Vekua and Gaetano Fichera

to Western applied mathematicians in an English translation, is the natural continuation of the ideological program of the Tbilisi school. It is concerned with shell theory which, as is well known, constitutes an elevated and difficult generalization of plane elasticity. The relevant geometric continua of shell theory, although two- dimensional, are no longer planar and their geometric properties deeply influence the analysis of the problems that arise in this important field of elasticity."


Lipman Bers

Once again L. Bers. He wrote: "In the theory of elliptic partial differential equations in the plane Vekua followed two different paths. One, similar to the work of Stefan Bergman, led to explicit formulas for solutions of elliptic equations with real analytic coefficients, in terms of arbitrary holomorphic functions of a complex variable. Vekua applied his formulas to very general boundary value problems and, in this connection, obtained a result which is today recognizable as a precursor of the Atiyah-Singer index theorem.

The other main direction of Vekua's investigations was concerned with properties of systems of two first order elliptic equations, viewed as generalized Cauchy- Riemann equations. This time real analyticity of the coefficients is not assumed, and it turns out that the properties in question are best understood in terms of generalized complex function theory. While Vekua's "generalized analytic functions" are basically the same as my "pseudoanalytic function", our motivation and our aims were somewhat different. In particular, Vekua applied his theory to elastic shells and to infinitesimal deformations of surfaces in 3-space".

The life of I. Vekua can be devided in to 8 periods:

- Shesheleti, Gali 1907-1924
- Zugdidi 1925
- Tbilisi 1925-1930
- Petersburg 1930-1933
- Tbilisi 1933-1951
- Moscow 1951-1958
- Novosibirsk 1958-1964
- Tbilisi 1964-1977

Main positions held:

- **Tbilisi 1933-1951**

1. Scientific secretary of the Tbilisi Mathematical Institute
2. Head of the theoretical mechanics chair of the Transcaucasian Institute of Engineers of Means of Communications
3. Deputy director of the Mathematical Institute of the Georgian Branch of USSR Academy of Sciences
4. Dean of the physical-and-mathematical faculty of the Tbilisi State University
5. Head of the geometry chair of the Tbilisi State University
6. Head of the applied mathematics department at the A. Razmadze Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Georgian SSR
7. Vice-Rector of Tbilisi State University
8. Chairman of the mathematical and natural sciences department of the Academy of Sciences of the Georgian SSR
9. Academician-Secretary of the Academy of Sciences of the Georgian SSR
10. Head of the higher mathematics chair of Tbilisi State University

- **Moscow 1951-1958**

1. Head of a department of the Central Aerohydrodynamics Institute, Moscow
2. Acting deputy director of the Precise Mechanics and Computer Hardware Institute of the USSR Academy of Sciences, Moscow
3. Head of the theoretical mechanics chair of the Moscow Physical Technical Institute
4. Professor of the differential equations chair of the M. Lomonosov Moscow State University
5. Deputy director of the V.A. Steklov Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences

- **Novosibirsk 1958-1964**

1. Member of the Presidium of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences
2. Rector of Novosibirsk State University
3. Head of the mathematical physics chair of the Novosibirsk University
4. Head of the theoretical department of the Hydrodynamics Institute of the Siberian Branch of the USSR Academy of Science

- **Tbilisi 1964-1977**

1. Vice-President of the Academy of Sciences of the Georgian SSR
2. Head of the mechanics sector of the A. Razmadze Tbilisi Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Georgian SSR
3. Rector of the Tbilisi State University
4. Scientific supervisor, director of the Institute of Applied Mathematics of the Tbilisi State University
5. President of the Academy of Sciences of the Georgian SSR.

Ilia Vekua left an indelible trace everywhere, in every field he had been working.

His scientific heritage is immortal and it is being developed in different countries of the world by his PhD students, PhD students of his PhD students, and his followers.

PhD Students

A. Bitsadze (Georgia)	P. Dubov (Russia)
I. Danilyuk (Ukraine)	A. Dzhuraev (Tajikistan)
V. Ivanov (Russia)	N. Tovmasyan (Armenia)
L. Mikhailov (Russia)	V. Jgenti (Georgia)
O. Kharazov (Azerbaijan)	G. Gagua (Georgia)
E. Obolashvili (Georgia)	L. Kiknadze (Georgia)
A. Kalandia (Georgia)	Sh. Metskhovrishvili (Georgia)
V. Khvedelidze (Georgia)	R. Kordzadze (Georgia)
B. Bojarski (Poland)	Cher (North Korea)
W. Schmidt (Germany)	Sun, Che-shen (China)
V. Vinogradov (Russia)	Y. Zhio Chen (China)
Y. Krivenkov (Russia)	G. Jaiani (Georgia)
I. Belov (Russia)	N. Kaldani (Georgia)

More than 100 PhD students of PhD Students.

It is impossible to give an approximate number of disciples. Among them are T. Meunargia, T. Vashakmadze and late D. Gordeziani from I.Vekua Institute of Applied Mathematics of TSU.

Now, we give a brief account of the most typical features of I. N. Vekua's rich legacy that have greatly influenced the development of the respective problems of mathematics.

The general linear boundary value problem for analytic functions of one complex variable, studied comprehensively by I. N. Vekua, holds the key position in the modern theory of the so-called non-Fredholmian problems for elliptic equations.

One of the basic problems of the function theory is associated with names of Riemann and Hilbert: Define a function $\Phi(z)$ analytic in D and satisfying the boundary condition

$$\mathrm{Re}[\lambda(t)\Phi^{+}(t)] = g(t), \quad t \in \partial D, \tag{1}$$

where λ and g are the known functions of the arc abscissa s of ∂D (i.e. $t = t(s)$) of D, while $\Phi^{+}(t)$ is the boundary value of the unknown function for $z \to t$ from D.

Introducing the notation

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t), \qquad \Phi\ (z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

problem (1) can be reduced to the problem with an oblique derivative, i.e. , to the Poincaré problem: Define a function harmonic in D and satisfying the following boundary condition

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y} = g(t), \qquad t \in \partial D. \tag{2}$$

In connection with the study of problems (1) and (2) the one-dimensional singular integral equation

$$A\varphi(t) \equiv \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t)S\varphi(t) + T\varphi(t) = f(t),\ t \in \partial D, \tag{3}$$

is considered, where S is a Cauchy-type singular operator:

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\partial D} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},\ \ t \in \partial D,$$

and T is the Fredholm integral operator.

One of the main questions of the theory of singular integral equations of the form (3) is the reduction of this equation to an equivalent second kind Fredholm equation (the problem of equivalent regularization). I. N. Vekua's solution of this problem is considered as a brilliant result in the theory of singular integral equations. Developing Carleman's idea, in the 1940s I. N. Vekua worked out (in classical assumptions) a way for constructing a theory of integral equations (3) known at present as the Carleman-Vekua method. It involves three stages: 1) solutions of a characteristic singular equation (i.e. , eq. (3) for $T = 0$) as well as of its associated equation are constructed effectively; 2) these solutions are used for an equivalent regularization of eq. (3) and of its associated equation; 3) Fredholm integral equations, constructed in this manner, are used for proving the Noether theorems for eq. (3).

The regularization problem can be solved using, in addition to the above-mentioned method, the method of regularization by multiplication of operators. The idea of this method is in the following: it is required to construct an operator B of type A (see (3)) such that the equation $BA\varphi = Bf$ be Fredholmian. In this case B is said to be the left regularizer of A. If the equations $A\varphi = f$ and $BA\varphi = Bf$ are equivalent, whatever f from the considered class of functions is, B is said to be the left equivalent regularizer of A. It was known that such an operator does not always exist. In this connection a question arises: is it possible to formulate the problem of constructing a Fredholm equation equivalent to eq. (3) in such a way that it should always have a solution? I. N. Vekua answered the question positively. He showed that there exists an operator B, constructed effectively in quadratures, such that either the equations $A\varphi = f$ and $BA\varphi = Bf$ or $A\varphi = f$ and $AB\phi = f$ are equivalent in the sense that either of the equations is solvable, then so is the other, and the connection $\varphi = B\phi$ exists between their solutions.

Using the theory of eq. (3), by means of his own integral representations of analytic functions

$$\Phi(z) = \int_{\partial D} \frac{t\mu(t)ds}{t-z}$$

when $\Phi(z)$ is a Hölder continuous in $\overline{D}$ and

$$\Phi(z) = \int_{\partial D} \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds + \int_{\partial D} \mu(t)\, ds$$

when $\Phi^{(m)}(z)$ is Hölder continuous in $\overline{D}$, where μ is a real Hölder continuous function of s, I. N. Vekua succeeded in solving completely the Riemann-Hilbert problem (1) in the following general formulation: In the domain D whose boundary ∂D is a sufficiently smooth, simple, closed curve; it is required to find an analytic function Φ satisfying the boundary condition

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m} \{\lambda_k(t)[\Phi^{(k)}(t)]^+ + T_k[(\Phi^{(k)})^+]\} = f(t) \tag{4}$$

where $(\Phi^{(k)})^+$ is a boundary value of the kth order derivative of Φ from D; λ_k and f are the functions given on ∂D and T_k are the Fredholm integral operators.

I. N. Vekua's results obtained in connection with problem (4) formed the basis of his further research devoted to constructing a

theory of normally solvable boundary value problems in the case of the following second order elliptic differential equation

$$\Delta u + a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_3(x,y)u = 0, \tag{5}$$

where a_1, a_2 and a_3 are analytic functions. These problems are an essential generalization of the Poincaré boundary value problem (2) in the case of equation (5). Indeed, the boundary condition is of the form

$$\sum_{j+k\le m} a_{jk}(t)\left[\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i \partial y^k} + T_{jk}\left(\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i \partial y^k}\right)\right] = f(t), t \qquad \in \partial D, \tag{6}$$

where a_{jk} and f are the known real functions on ∂D, T_{jk} are the Fredholm integral operators.

In the constructing the theory of this problem I. N. Vekua made use of the integral representation of all regular solutions of eq. (5)

$$u(x,y) = \operatorname{Re}[\alpha(z,\bar{z})\varphi(z) + \int_0^z \beta(z,\bar{z},t)\varphi(t)dt], \tag{7}$$

where φ is an arbitrary analytic function, while α and β are functions constructed by means of the coefficients a_1, a_2 and a_3.

Formulas similar to (7) were obtained by T. Carleman, H. Lewy and S. Bergman. The method of constructing formula (7), known as the Riemann-Vekua method, is considered to be the most simple, clear and constructive one. Here we recall L. Bers again: "I. Vekua applied his formulas to very general boundary value problems and, in this connection, obtained a result which is today recognizable as a precursor of the Atiyan-Singer index theorem".

I. N. Vekua generalized the integral representation for the elliptic equation

$$\Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k}u) = 0, \tag{8}$$

where L_k is the kth order differential operator with analytic coefficients.

Employing his formulas, I. N. Vekua investigated the following boundary value problem: Find the regular solution of this equation in the simply connected domain D, satisfying the conditions

$$\left.\frac{d^{j}u}{d\nu^{j}}\right|_{\partial D} = f_j, \quad j = 0,1,\dots,n-1,$$

where ν is the outward normal of ∂D,

In the theory of general complex representations of solutions of elliptic equations I. N. Vekua discovered a remarkable fact of a possibility of equivalent reduction of any boundary value problem for eq. (8) to the corresponding boundary value problem for a system of analytic functions.

As is well-known, the theory of analytic functions $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ of one complex variable $z = x + iy$ is the theory of the Cauchy-Riemann system

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

This system is the particular case of the elliptic system

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv = 0, \tag{9}$$

with the real coefficients a, b, c, d which are functions of the real variables x, y.

Introducing the notation

$$W(z) := u + iv, \quad 2\frac{\partial}{\partial z} := \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y},$$
$$4A := a + d + i(c - b), \quad 4B = a - d + i(c + b),$$

system (9) can be rewritten as

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} + AW + B\overline{W} = 0. \tag{10}$$

Back in the 19 th century Beltrami and Picard tried to construct a theory of generalized analytic functions $w = u + iv$. Important results in this direction were obtained by T. Carlemann and M.A. Lavrentyev. I. N.Vekua's intensive research also yielded basic results that formed the principal component part of the modern theory of functions satisfying the equation

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} - q_1\frac{\partial F}{\partial z} - q_2\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}} + AF + B\overline{F} = 0. \tag{11}$$

If $|q_1| + |q_2| < 1,$ then many properties of solutions of system (9) remain valid for eq. (11) which is a complex form of a linear elliptic system of two equations with respect to the real and imaginary parts of F. In the constructed theory the known functions q_1, q_2, A and B are required to be sufficiently smooth.

I.N. Vekua made a substantial contribution to the theory of metaharmonic functions which are solutions of the Helmholtz equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^0} + \lambda^2 u = 0, \ \lambda = const, \ p \geq 2. \tag{12}$$

He gave the following integral representation of metaharmonic functions

$$u(x_1,\dots,x_p) = u_0(x_1,\dots,x_p) - \int_0^1 u_0(x_1,t,\dots,x_p t)\, t^q \frac{\partial}{\partial t} I_0(\lambda r\sqrt{1-t})dt,$$

where u_0 is an arbitrary harmonic function, $q = \dfrac{p-2}{2}$, $r^2 = x_1^2 + \dots + x_p^2$, and I_0 is the Bessel function. He also constructed an inverse integral representation of this formula and, moreover, in the case of a real λ he showed that under the Sommerfeld conditions

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda u = o(r^{-q-1/2}) \ \text{ and } \ u = O(r^{-q-1/2}),$$

providing the uniqueness of the solution of the external Dirichlet and Neumann problems in the case of eq. (12), the second condition is the consequence of the first one.

I. N. Vekua showed that his method of constructing solutions of elliptic linear equations could be used in the investigation of the properties of solutions of some nonlinear elliptic equations. Thus, for example, he studied the properties of solutions of the Gaussian equation

$$\Delta \log v(x,y) = -2K(x,y)v(x,y),$$

which enabled him to find a simple proof of the well-known Hilbert theorem on the nonexistence of a regular surface with a negative curvature, conformally homeomorphic to the whole plane.

The range of theoretical results obtained by I.N. Vekua is wide. On the basis of his methods of investigation of elliptic equations a consistent theory of elastic shells was constructed. In particular, I.N. Vekua proposed two versions of this theory, one of which is used in the investigation of thin shells, and the other in the construction of a membrane theory of shells.

The elastic body is called a prismatic shell if it is bounded above and below by, respectively, the surfaces (so called face surfaces)

$$x_3 = \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) \ \ and \ \ x_3 = \overset{(-)}{h}(x_1,x_2),$$

laterally by a cylindrical surface Γ of generatrix parallel to the x_3-axis and its vertical dimension is sufficiently small compared with other dimensions of the body (see Fig. 1).

In other words, the 3D elastic prismatic shell-like body occupies a bounded region $\overline{\Omega}$ with boundary $\partial\Omega$, which is defined as:

$$\Omega := \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathrm{R}^3 : (x_1,x_2) \in \omega, \ \overset{(-)}{h}(x_1,x_2) < x_3 < \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) \right\}, \quad (13)$$

where $\overline{\omega} := \omega \cup \partial\omega$ is the so-called projection of the prismatic shell $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$

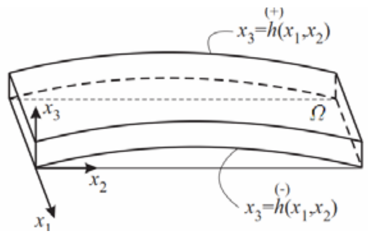


Figure 1: Prismatic shell with constant thickness

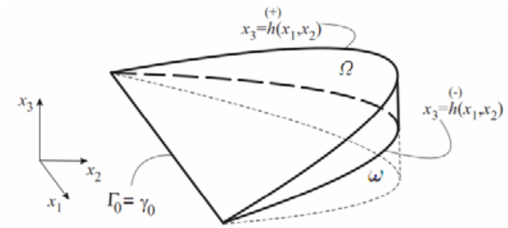


Figure 2: A sharp cusped prismatic shell with a semicircle projection. $\partial\Omega$ is a Lipschitz boundary

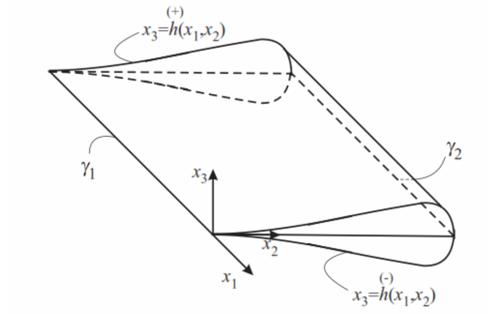


Figure 3: A cusped plate with sharp γ_1 and blunt γ_2 edges, $\gamma_0 = \gamma_1 \cup \gamma_2$. $\partial\Omega$ is a non-Lipschitz boundary

In what follows we assume that

$$\overset{(\pm)}{h}(x_1,x_2) \in C^2(\omega) \cap C(\overline{\omega}),$$

and

$$2h(x_1,x_2) := \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) - \overset{(-)}{h}(x_1,x_2) \begin{cases} > 0 & \text{for} \quad (x_1,x_2) \in \omega, \\ \geq 0 & \text{for} \quad (x_1,x_2) \in \partial\omega \end{cases}$$

is the thickness of the prismatic shell $\overline{\Omega}$ at the points $(x_1,x_2) \in \overline{\omega}$. $\max\{2h\}$ is essentially less than the characteristic dimensions of ω (see Figures 1-8). Let $x_3 = \tilde{h}(x_1,x_2)$ denote the "middle" surface of the prismatic shell, then

$$2\tilde{h}(x_1,x_2) := \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) + \overset{(-)}{h}(x_1,x_2).$$

In the symmetric case of prismatic shells, i.e., when

$$\overset{(-)}{h}(x_1,x_2) = -\overset{(+)}{h}(x_1,x_2), \text{ i.e., } 2\widetilde{h}(x_1,x_2) = 0,$$

we have to do with plates of variable thickness $2h(x_1,x_2)$ and a mid-plane ω (see Fig. 3). Prismatic shells are called cusped prismatic shells if a set γ_0, consisting of $(x_1,x_2) \in \partial\omega$ for which $2h(x_1,x_2) = 0$, is not empty (see Fig. 2, Fig. 3).

Distinctions between the prismatic shell of a constant thickness and the standard shell of a constant thickness are shown in Fig. 4, where cross-sections of the prismatic shell of a constant thickness with its projection and of the standard shell of a constant thickness with its middle surface are given in red and green colors, respectively (common parts are given in blue, see Fig. 4, Fig. 5).

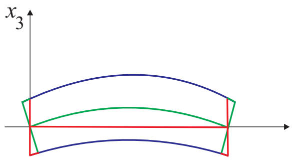


Figure 4: Comparison of cross-sections of prismatic and standard shells

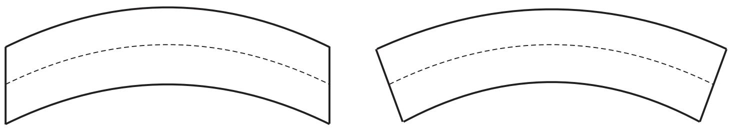


Figure 5: Cross-sections of a prismatic (left) and a standard shell with the same mid-surface

The lateral boundary of the standard shell is orthogonal to the "middle surface" of the shell, while the lateral boundary of the prismatic shell is orthogonal to the prismatic shell's projection on $x_3 = 0$ (Fig. 5).

In what follows X_{ij} and e_{ij} are the stress and strain tensors, respectively, u_i are the displacements, Φ_i are the volume force components, ρ is the density, λ and μ are the Lamé constants, δ_{ij} is the Kronecker delta. Moreover, repeated indices imply summation (Greek letters run from 1 to 2, and Latin letters run from 1 to 3,

unless otherwise stated), bar under one of the repeated indices means that we do not sum.

By u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}, Φ_{jr} we denote the r-th order moments of the corresponding quantities u_i, X_{ij}, e_{ij}, Φ_j as defined below:

$$(u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}, \Phi_{jr})(x_1,x_2,t)$$

$$:= \int_{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)} (u_i, X_{ij}, e_{ij}, \Phi_j)(x_1,x_2,x_3,t) P_r(ax_3 - b)\, dx_3, \quad i,j = \overline{1,3}. \tag{14}$$

where

$$a(x_1,x_2) := \frac{1}{h(x_1,x_2)}, \quad b(x_1,x_2) := \frac{\widetilde{h}(x_1,x_2)}{h(x_1,x_2)},$$

and

$$P_r(\tau) = \frac{1}{2^r r!} \frac{d^r(\tau^2 - 1)^r}{d\tau^r}, \quad r = 0,1,\cdots.$$

are the r-th order Legendre Polynomials

I.Vekua's hierarchical models for elastic prismatic shells are the mathematical models (Vekua 1955, 1985). Their constructing is based on the multiplication of the basic equations of linear elasticity:

Motion Equations

$$X_{ij,i} + \Phi_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x_1,x_2,x_3,t), \quad (x_1,x_2,x_3) \in \Omega \subset \mathrm{R}^3, \tag{15}$$

$$t > t_0, \quad j = \overline{1,3};$$

Generalized Hooke's law (isotropic case)

$$X_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i,j = \overline{1,3}, \quad \theta := e_{ii}; \tag{16}$$

Kinematic Relations

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i,j = \overline{1,3}, \tag{17}$$

by Legendre polynomials $P_r(ax_3 - b)$ and then integration with respect to x_3 within the limits $\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)$ and $\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)$.

By constructing Vekua's hierarchical models in Vekua's first version on upper and lower face surfaces stress-vectors are assumed to be known, while there the values of the displacements

$$\overset{(\pm)}{u}_i := u_i(x_1, x_2, \overset{(\pm)}{h}(x_1, x_2), t) = \sum_{s=0}^{\infty} a(s+\frac{1}{2}) u_{is} (\pm 1)^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^s (2s+1)}{2h} u_{is}$$

are calculated from their (displacements') Fourier-Legendre-series

$$(u_i, X_{ij}, e_{ij})(x_1, x_2, x_3, t) := \sum_{r=0}^{\infty} a(r+\frac{1}{2})(u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr})(x_1, x_2, t) P_r(ax_3 - b)$$

expansions on the segment $x_3 \in [\overset{(-)}{h}(x_1, x_2), \overset{(+)}{h}(x_1, x_2)]$ and vice versa in his second version.

So, we get the equivalent to (15)-(17) infinite system with respect to the so called r-th order moments X_{ijr}, e_{ijr}, u_{ir}. Then, in the usual way, we construct an equivalent infinite system with respect to the r-th order moments u_{ir} (Vekua 1955). After this, if we suppose that the moments whose subscripts, indicating moments' order, are greater than N equal zero and consider for each *j=1,2,3* only the first $N+1$ equations ($r = \overline{0, N}$) in the obtained infinite system of equations with respect to the r-th order moments u_{ir}, we obtain the $N-$th order approximation (hierarchical model) governing system consisting of $3N+3$ equations with respect to $3N+3$ unknown functions $\overset{N}{u}_{ir}$ (roughly speaking $\overset{N}{u}_{ir}$ is an "approximate value" of u_{ir}, since $\overset{N}{u}_{ir}$ are solutions of the derived finite system), $i = \overline{1,3}$, $r = \overline{0, N}$.

$$\mu\left[\left(h^{2r+1}\overset{N}{v}_{\alpha r,j}\right)_{,\alpha} + \left(h^{2r+1}\overset{N}{v}_{jr,\alpha}\right)_{,\alpha}\right] + \lambda\delta_{\alpha j}\left(h^{2r+1}\overset{N}{v}_{\gamma r,\gamma}\right)_{,\alpha} \tag{18}$$

$$+\sum_{s=r+1}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha jks}\, h^{r+s+1}\overset{N}{v}_{ks}\right)_{,\alpha} + \sum_{l=0}^{r-1}\overset{r}{a}_{il}\left[\lambda\delta_{ij}h^{r+l+1}\overset{N}{v}_{\gamma l,\gamma} + \mu h^{r+l+1}\left(\overset{N}{v}_{il,j} + \overset{N}{v}_{jl,i}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{s=l+1}^{N}\overset{l}{B}_{ijks}\, h^{r+s+1}\overset{N}{v}_{ks}\right] + h^r \overset{r}{X}_j = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1}\overset{N}{v}_{jr}}{\partial t^2},\ r = \overline{0,N},\ j = \overline{1,3},\ \sum_{q}^{q-1}(\cdots) \equiv 0,$$

where

$$\overset{N}{v}_{kr} := \frac{\overset{N}{u}_{kr}}{h^{r+1}},\ k = \overline{1,3},\ r = \overline{0,N},$$

$\overset{r}{a}_{il}$ depend only on the thickness, $\overset{l}{B}_{ijks}$ depend only on the thickness and the Lamé parameters, $\overset{r}{X}_j$ depend only on the stresses applied at the face surfaces, the volume forces, and the thickness.

In the static case if $N=0$ we immediately get the governing system of the $N=0$ approximation (superscript $N=0$ is omitted below)

$$-\mu[(hv_{\alpha 0,\beta})_{,\alpha} + (hv_{\beta 0,\alpha})_{,\alpha}] - \lambda(hv_{\gamma 0,\gamma})_{,\beta} = \overset{0}{X}_\beta,\ \beta = 1,2,$$

$$-\mu(hv_{30,\alpha})_{,\alpha} = \overset{0}{X}_3, \tag{19}$$

and the relations

$$X_{\alpha j0,\alpha} + \overset{0}{X}_j = 0,$$

$$e_{\alpha\beta 0} = \frac{h}{2}(v_{\alpha 0,\beta} + v_{\beta 0,\alpha}),$$

$$e_{\alpha 30} = \frac{h}{2}v_{30,\alpha},\quad e_{330} = 0,$$

$$X_{\alpha j0} = \lambda\delta_{\alpha j}e_{\gamma\gamma 0} + 2\mu e_{\alpha j0},$$

$$X_{330} = \nu X_{\alpha\alpha 0},$$

In the static case for the symmetric shell I. Vekua's system in the $N=1$ approximation has the form

$$-\mu[(hv_{\alpha 0,\beta})_{,\alpha} + (hv_{\beta 0,\alpha})_{,\alpha}] - \lambda(hv_{\gamma 0,\gamma})_{,\beta} \tag{20}$$

$$-3\lambda(hv_{31})_{,\beta} = \overset{0}{X}_\beta,\quad \beta = 1,2,$$

$$-\mu(hv_{30,\alpha})_{,\alpha} - 3\mu(hv_{\alpha 1})_{,\alpha} = \overset{0}{X}_3, \tag{21}$$

$$-\mu[(h^3 v_{\alpha 1,\beta})_{,\alpha} + (h^3 v_{\beta 1,\alpha})_{,\alpha}] - \lambda (h^3 v_{\gamma 1,\gamma})_{,\beta}$$

$$+\mu h(v_{30,\beta} + 3v_{\beta 1}) = h \overset{1}{X}_{\beta}, \quad \beta = 1,2, \qquad (22)$$

$$-\mu (h^3 v_{31,\alpha})_{,\alpha} + \lambda h v_{\gamma 0,\gamma} + 3(\lambda + 2\mu) h v_{31} = h \overset{1}{X}_3 . \qquad (23)$$

Systems (21), (22) and (20), (23) correspond to bending and tension-compression, correspondingly.

Note that for the plate of a constant thickness $2h$ from the bending system (21), (22), under the corresponding assumptions we can derive the classical bending equation

$$\Delta\Delta u_3 = \frac{q}{D^*},$$

where

$$u_3 = \frac{1}{2} v_{30}$$

and

$$D^* = \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} D.$$

Here D is the classical flexural rigidity. So, Vekua's plate bending model in the $N=1$ approximation actually coincides with the classical bending model but by bending Vekua's plate is flexurally more rigid than the classical one.

In the membrane theory of shells with an alternating Gaussian curvature the main part is played by an equation of the mixed type, in particular, by the Holmgren-Gellerstedt equation

$$y^{2m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

($m \geq 0$ is an integer) and Lavrentyev-Bitsadze equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + signy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

for which the Tricomi problem and its various generalizations acquire clearly defined mechanical sense. This fact, discovered by I.N. Vekua in the mid-1950s evoked great interest among mathematicians and

mechanists, since prior to that period equations of mixed type were applied only to problems of aerodynamics.

Because of the depth and importance of I. N. Vekua's investigations and the new scientific trends founded by him he ranks among the most outstanding scientists of our time.

Ilia Vekua was a great public figure and personality, the embodiment of both physical and spiritual greatness.

That is why he was given everlasting abode at the Mtatsminda Pantheon of Georgian writers and public figures.

He is gone 40 years ago but his scientific results and ideas are still important and applied and developed by his former PhD students and followers, in general. Finally, we give in short a survey of development of his results and ideas only in one direction: Lower dimensional theories formulated from the 3D theory of elasticity using a displacement ansatz with the truncated (roughly speaking) Fourier series expansion with respect to the Legendre polynomials. In other words in the direction of hierarchical models for prismatic (in particular, plates) and standard shells of variable thickness, in general. We mostly touch cusped (tapered) prismatic shells[*)].

Works of I. Babuška, D. Gordeziani, V. Guliaev, G. Jaiani, I. Khoma, A. Khvoles, T. Meunargia, C. Schwab, T. Tskhadaia, T. Vashakmadze, V. Zhgenti, and others are devoted to further analysis of I.Vekua's models (rigorous estimation of the modelling error, numerical solutions, etc.) and their generalizations (to non-shallow shells, to the anisotropic case, etc.).

In 1955 and 1965 I.Vekua pointed out the importance of investti-

[*)] For references see G. Jaiani, Cusped Shell-like Structures, Springer, Heidelberg-Dordrecht-London-New York, 2011 gation of cusped prismatic shells, which is connected with degenerate (singular) equations and systems, but no one tackled this problem. In 1968 he, as my PhD advisor, suggested to concentrate my interest on this problem. Until the early nineties of the last century only my publications were devoted to this problem preceded with a work of A. Khvoles, dealing with Vekua's representations of general solutions of some equations connected with the cusped prismatic shells. Later, I managed to involve in studies in this direction my PhD students and some colleagues within the framework of international projects.

Applying the function-analytic method, developed by Fichera (1956, 1960), the particular case $\lambda = \mu$ of Vekua's system (19) of the $N = 0$ approximation for general form cusped prismatic shells have been investigated by Jaiani (1988). The main conclusion says that at a blunt cusped edge $\left(\frac{\partial h}{\partial n} = +\infty\right)$ the displacement vector components can be prescribed, while the sharp cusped edge $\left(0 \le \frac{\partial h}{\partial n} < \infty\right)$ should be freed from BCs (Keldysh type BVP for displacements). The last result concerning sharp cusped edges is true for the Nth approximation as well (Jaiani, 2001). In the $N = 1$ approximation for the symmetric prismatic shell in the case

$$2h(x_1, x_2) = h_0 x_2^k, \quad h_0 = const > 0, \; k = const \ge 0, \; x_2 \ge 0, \quad (24)$$

the tension-compression system (20), (23) is investigated by G. Devdariani, G. Jaiani, S. Kharibegashvili, D. Natroshvili (2000). The existence and uniqueness of generalized solutions of BVPs with Dirichlet [for the weighted zero moments when $k < 1$ and for weighted first moments when $k < 1/3$] and Keldysh type (for the weighted zero-moments when $k \ge 1$ and for the weighted first moments when $k \ge 1/3$) BCs are proved in weighted Sobolev spaces.

Jaiani and Schulze (2007) studied the vibration tension-compression system [(vanishing of the vibration frequency corresponds to the static system) (20), (23)] under all reasonable nonhomogeneous

Dirichlet, weighted Neumann, and mixed BCs when the thickness satisfies the unilateral condition

$$2h(x_1, x_2) \ge h_0 x_2^k, \quad h_0 = const > 0, \; k = const \ge 0, \; x_2 \ge 0. \quad (25)$$

The bending [see system (21), (22)] vibration problem can be investigated in an analogous manner.

The method of investigation of hierarchical models based on the idea to get Korn's type inequality for 2D models from the 3D Korn's inequality for non-cusped domains and then to use Lax-Milgram theorem belongs to D. Gordeziani (1974) which (the method) found its complete realization in works of D. Gordeziani, G. and M. Avalishvili (2003). By means of the solutions of these 2D BVPs, a sequence of approximate solutions in the corresponding 3D region is constructed. This sequence converges in the Sobolev space H^1 to the solution of the corresponding original 3D BVP. The analogous approach is developed by Schwab (1996). This idea with the corresponding modifications was successfully used by G. Jaiani, S. Kharibegashvili, D. Natroshvili, and W. Wendland (2003, 2004) in the case when the cusped prismatic shell occupies a Lipschitz 3D domain, on the face surfaces stress vectors, while on the non-cusped edge weighted moments of displacement vector components are given. With the help of variational methods, the existence and uniqueness theorems for the corresponding 2D BVPs are proved in the appropriate weighted function spaces. The systems of differential equations corresponding to the 2D variational hierarchical models are explicitly constructed for a general system of functions and for the Legendre polynomials, in particular, i.e., in I.Vekua's case. Investigations for plates, prismatic and general standard shells whose thickness may vanish on their boundaries but occupy Lipschitz 3D domains are carried out by D. Gordeziani G. Avalishvili, M. Avalishvili, B.Miara (2004-2010). Their works (2004, 2005) are also devoted to the design of a hierarchy of 2D models for dynamical problems within the theory of multicomponent linearly elastic mixtures in the case of prismatic shells with thickness which may vanish on some parts of its boundary, provided that the 3D domain occupied by the prismatic shell is the Lipschitz one. The above method does not allow to consider BVPs when on the cusped edge either displacements or loads (the loads in this case are concentrated along the cusped edges) are prescribed.

By N. Chinchaladze, R. P. Gilbert, G. Jaiani, S. Kharibegashvili, D. Natroshvili (2008) the well-posedness of BVPs for elastic cusped plates (i.e., symmetric prismatic shells) in the N th approximation $N \geq 0$ of I.Vekua's hierarchical models [see system (18) in the static case] under all the reasonable BCs at the cusped edge and given displacements at the non-cusped edge are studied. The approach is applicable in the same way also for non-symmetric prismatic shells. Special attention is drawn to the $N = 0,1,2$ approximations as to important cases from the practical point of view. For example, $N = 0$ and $N = 1$ models, roughly speaking, coincide with the plane deformation and Kirchhoff-Love model, respectively. It is assumed that the cusped plate projection ω has a Lipschitz boundary $\partial\omega = \bar{\gamma}_0 \cup \bar{\gamma}_1,$ where $\bar{\gamma}_0$ is a segment of the x_1-axis and γ_1 lies in the upper half-plane $x_2 > 0;$ moreover, in some neighborhood of an edge of the plate, which may be cusped, the plate thickness has the form (24). Then γ_0 will be a cusped edge for $k > 0$. Note that in the last case, on the one hand, a 3D domain Ω occupied by the plate is non-Lipschitz for $k > 1$; on the other hand, the governing system consisting of $3N + 3$ simultaneous equations [see (18) in the static case] is elliptic in Ω and has an order degeneration on γ_0 for any $k > 0$. The classical and weak setting of the BVPs in the case of the N th approximation is considered. For arbitrary $k \geq 0$ appropriate weighted function spaces $X_N^k(\omega)$ which are crucial in analysis of the problem are introduced. $X_N^k(\omega)$ is the completion of the space $[D(\omega)]^{3N+3}$ with the help of the norm:

$$\|v\|^2_{X_N^k} = (v,v)_{X_N^k} = \sum_{r=0}^{n}\left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{\omega}\sum_{i.j=1}^{3} e^2_{ijr}(v)\frac{d\omega}{h} = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{N}\sum_{i,j=1}^{3}\left(r+\frac{1}{2}\right)$$

$$\times\int_{\omega}\left[h^{r+1}(v_{ir,j}+v_{jr,i})+\sum_{s=r+1}^{N}h^{s+1}\left(\overset{r}{b}_{js}v_{is}+\overset{r}{b}_{is}v_{js}\right)\right]^2\frac{d\omega}{h},$$

where $\overset{r}{b}_{is}$ depend only on the thickness. Coerciveness of the corresponding bilinear form is shown and uniqueness and existence results for the variational problem are proved. The structure of the spaces X_N^k is described in detail and their connection with weighted Sobolev spaces is established. Moreover, some sufficient conditions for a linear functional arising in the right hand side of the variational equation to be bounded are given. $N = 0,1,2$ approximations are considered in detail. Peculiarities characterizing these concrete models are exposed. Note that for the r th order moments Dirichlet and Keldysh BCs are correct when

$$k < \frac{1}{2r+1} \quad \text{and} \quad k \geq \frac{1}{2r+1}, \quad r = \overline{0,N},$$

respectively.

The works of G. Jaiani (1973,2008) deals with a system consisting of singular partial differential equations of the first and second order arising in the zero approximation of I.Vekua's hierarchical models of prismatic shells, when the thickness of the prismatic shell varies as a power function of one argument and vanishes at the cusped edge of the shell [see (24)]. For this system of special type a nonlocal BVP in the half-plane is solved in the explicit form. The BVP under consideration corresponds to the stress-strain state of the cusped prismatic shell under the action of concentrated forces and concentrated couples.

Surveys of the works by G. Giorgadze, G. Avalishvili, N. Chinchaladze and R.P. Gilbert, T. Meunargia, T. Vashakmadze and some other talks of the program of the GeoMech8 can be considered as continuation of the present survey in the sense of presentation more in detail the development of the heritage of Ilia Vekua which (the development) should be treated as his heritage in a wide sense.

ON DEVELOPMENT OF I. VEKUA METHOD FOR CONSTRUCTION OF HIERARCHICAL MODELS OF ELASTIC STRUCTURES

Gia Avalishvili*, Mariam Avalishvili**
*I. Javakhishvili Tbilisi State University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Tbilisi, Georgia, gavalish@yahoo.com
**University of Georgia, Tbilisi, Georgia, mavalish@yahoo.com

In the present talk results on application of I. Vekua's dimensional reduction method, its extensions and generalizations for construction of hierarchical models of elastic structures are presented. In [1] Ilia Vekua constructed a hierarchy of two-dimensional models for linearly elastic homogeneous plates with variable thickness. In this paper, multiplying equations, corresponding to three-dimensional model by Legendre polynomials with respect to the variable x_3 of plate thickness, integrating them and expanding components of the displacement vector-function, stress and strain tensors into orthogonal Fourier-Legendre series with respect to x_3 and considering partial sums of the series a hierarchy of two-dimensional models for plate was constructed. Note that the classical Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin models can be incorporated into the hierarchy, obtained by I. Vekua so that it can be considered as an improvement of the frequently used engineering plate models. Mathematical models of plates and shells, constructed by I. Vekua, are presented in his monograph [2].

First results on the investigation of mathematical models constructed by I. Vekua were obtained by D. Gordeziani in [3, 4], where the static two-dimensional models for general thin shallow shells in Sobolev spaces were investigated and the relationship between the static three-dimensional model and two-dimensional ones in the spaces of classical smooth enough functions in the case of homogeneous isotropic linearly elastic plate with constant thickness was studied. Later on, applying variational approach and an idea of I. Vekua and its generalization [5] static and dynamical hierarchical two-dimensional models for plates and shells and one-dimensional models of bars were constructed and investigated within the

frameworks of classical linear theory of elasticity, thermoelasticity, theory of mixtures, thermoelasticity with microtemperatures, and non-classical theories of thermoelasticity. On the basis of the results of investigation of dimensional reduction algorithms for plates, shells and bars pluri-dimensional hierarchical models were constructed and studied for elastic multistructures consisting of several parts with different geometric shapes.

Acknowledgement. This work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation (SRNSF) [217596, Construction and investigation of hierarchical models for thermoelastic piezoelectric structures].

References

1. Vekua, I.N.: On a way of calculating of prismatic shells, Proc. A. Razmadze Inst. Math. Georgian Acad. Sci., **21** (1955), 191-259 (Russian).
2. Vekua, I.N.: Shell theory: General methods of construction, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985.
3. Gordeziani, D.G.: On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **215** (1974), 6, 1289-1292 (Russian).
4. Gordeziani, D.G.: To the exactness of one variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **216** (1974), 4, 751-754 (Russian).
5. G. Jaiani, On a mathematical model of bars with variable rectangular cross-sections, ZAMM, **81** (2001), 3, 147-173.

SOLITARY WAVES IN FLUIDS WITH VARIABLE DISPERSION

Vasily Yu. Belashov*, Elena S. Belashova**, Oleg A. Kharshiladze***
* Kazan Federal University, Kazan, Russia, vybelashov@yahoo.com
** Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia
***I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia, oleg.kharshiladze@gmail.com

We study the problem of dynamics the 2D and 3D solitary waves in fluids with the varying in time and space dispersive parameter $\beta = \beta(t, \mathbf{r})$. For example, that have place on studying of the evolution of the 3D FMS waves in magnetized plasma, which is described by the KP equation [1], when β is a function of the Alfvén velocity $v_A = f[B(t,\mathbf{r}), n(t,\mathbf{r})]$ (n is the plasma density) and the angle $\theta = \theta(\mathbf{k}\,\hat{}\,\mathbf{B})$: $\beta = v_A (c^2 / 2\omega_{0i}^2)(\cot^2\theta - m_e / m_i)$. Similar situation takes place for the ion-acoustic (IA) waves in collisional dusty plasma when in the absence of dissipation the dispersion law are $\omega = kV_s$ where $V_s = \sqrt{(T_e / m_i)(n_{i0} / n_{e0}) + T_i / m_i}$ is the IA speed in dissipationless plasma with constant-charge dust. It is clear that the dispersion will be variable with variation of ratio of plasma components. Similar situation can also take place for solitary waves on shallow water with variable depth [1]. We present here the results of numerical simulation of the solitary waves in the KP model distracting from a specific type of medium for different model functions β. As a result we have obtained the different types of stable and unstable solutions including the solutions of the mixed "soliton – non-soliton" type for different character of dispersion variations.

Acknowledgement. The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University.

References

1. Belashov, V.Yu., Belashova, E.S.: Solitons: Theory, simulation, applications. Publishing Center “School”, Kazan, (2016).

NUMERICAL MODELING OF INTERACTION OF VORTEX STRUCTURES IN FLUIDS AND PLASMAS

Vasily Yu. Belashov*, Oleg A. Kharshiladze**
*Kazan Federal University, Kazan, Russia, vybelashov@yahoo.com
**I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia, oleg.kharshiladze@gmail.com

The results of numerical modeling of interaction of the vortex structures in a continuum, and, specifically, in fluids and plasmas in 2D approach, when the Euler-type equations are valid, are presented.

The equations’ set $e_i\,\mathrm{d}_t\,x_i = \partial_{y_i}\mathsf{H}/B$, $e_i\,\mathrm{d}_t\,y_i = -\partial_{x_i}\mathsf{H}/B$, $\partial_t\rho + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = 0$, $\mathbf{v} = -(\hat{\mathbf{z}}\times\nabla\psi)/B$, $\Delta\psi = -\rho$ describing the continuum or quasi-particles with Coulomb interaction models [1], where ρ is a vorticity or charge density and ψ is a stream function or potential for inviscid fluid and guiding-centre plasma, respectively, and H is the Hamiltonian, was considered. For numerical simulation the CD method specially modified was used. The results showed that for some conditions the interaction is nontrivial and can lead to formation of complex forms of vorticity regions, such as the vorticity filaments and sheets, and also can ended to formation of the turbulent field. The theoretical explanation of the effects is given on the basis of the generalized critical parameter which determines qualitative character of interaction. We investigated the applications to dynamics of vortex structures in the atmosphere, hydrosphere and plasma, namely: evolution of the cyclonic type synoptic and ocean vortices, and interactions in the vortex-dust particles system, and also dynamics of streams of charged particles in a uniform magnetic field. Our approach may be useful for the interpretation of effects associated with turbulent processes in fluids and plasmas.

Acknowledgement. The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University.

References

1. Belashov V. Yu. Modeling of dynamics of vortex structures in continuous media. Astrophys. Aerospace Technol. **4**(3) (2016), 28.

ON SOME SOLUTIONS OF ELASTIC MATERIALS WITH VOIDS

Lamara Bitsadze
I.Vekua Institute of Applied Mathematics of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia, lamarabitsadze@yahoo.com

In this talk the 3D quasi-static theory of elasticity for materials with voids is considered. The representation of regular solution of the system of equations in the considered theory is obtained. There the fundamental and some other matrixes of singular solutions are constructed in terms of elementary functions.

References

1. Iesan D. A Theory of Thermoelastic Materials with voids, Acta Mechanica, **60** (1986), 67-89.
2. Cowin Stephen C., Nunziato Jace W. Linear theory of elastic materials with voids. Journal of Elasticity, **13** (1983), 125–147.

DETERMINATION OF STRESS – STRAIN STATE OF WELDED LAYER AT ROLLING BY CREEP THEORY

Gulmira Bulyekbaeva*, Omar Kikvidze**

*Caspian State University of Technologies and Engineering named after Sh. Yessenov miragul@mail.ru

**Akaki Tsereteli State University kikvidze61@mail.ru

Technological process of a weld carries out restoration of worn-out surfaces of details. For the purpose of improvement of mechanical characteristics and quality of a surface of the built-up layer plastic deformation is necessary that is often carried out by a rolling. At a rolling plastic deformation is made by a rigid cylindrical roller which makes the flat parallel movement with a constant velocity.

We consider a two-dimensional, established, viscous – plastic flow of a material on the basis of the theory of hardening [1]:

$$\sigma_e = a\xi_e^m \kappa^n$$

where $\kappa = \int \xi_e dt$ is the Odqvist parameter, σ_e is the equivalent stress, ξ_e is the equivalent speed of deformation, a, m, n are constants of material.

The nonlinear differential equations of equilibrium are written down concerning components of flow velocity whom include also average stress [2].

Boundary conditions for numerical integration of the equations are written down. After determination of velocity of a flow we calculate components of a deviator of stress by the equations of Saint-Venant–Levy–Mises. The force necessary for deformation of a layer and torque on a roller are defined. Therefore we define the power characteristic of the technological process.

References

1. Малинин Н.Н. Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, (1986). 216 с.
2. Киквидзе О.Г., Булекбаева Г.Ж., Кипиани П.Н. Пластическое деформирование наплавленного слоя на плоской поверхности. //Georgian Engineering News, №1 (Vol. 77). (2016), 64-66.

CUSPED PRISMATIC SHELL-FLUID INTERACTION PROBLEMS

Natalia Chinchaladze*, Robert Gilbert**

* Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics & Department of Mathematics of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

**University of Delaware, DE, USA

The talk is devoted to the updated survey of problems with the some elastic cusped structure-incompressible fluids interaction problems, when in the solid part either the Kirchhoff-Love plate or Vekua's prismatic shell in the lower order approximations are considered (see, e.g. [1-6] and references therein).

Application of I. Vekua's dimensional reduction method to the viscous Newtonian fluid occupying thin prismatic domains will be also presented [7].

References

1. N. Chinchaladze, On some nonclassical problems for differential equations and their applications to the theory of cusped prismatic shells. Lect. Notes TICMI, 9 (2008)
2. N. Chinchaladze, G. Jaiani, On a cylindrical bending of a plate with two cusped edges under action of an ideal fluid. Bull. TICMI 2, 30–34 (1998)
3. N. Chinchaladze, G. Jaiani, On a cusped elastic solid–fluid interaction problem. Appl. Math.Inform. 6(2), 25–64 (2001)
4. N. Chinchaladze, R. Gilbert, Cylindrical vibration of an elastic cusped plate under the action of an incompressible fluid in case of N = 0 approximation of I. Vekua's hierarchical models. Complex Var. Theor. Appl. 50(7–11), 479–496 (2005)

5. N. Chinchaladze, R. Gilbert, Vibration of an elastic plate under action of an incompressible fluid in case of N = 0 approximation of I. Vekua's hierarchical models. Appl. Anal. 85(9), 1177–1187 (2006)
6. N. Chinchaladze, R.P. Gilbert, G.V. Jaiani, S. Kharibegashvili, D. Natroshvili, Initial-boundary value problems for solid–fluid composite structures, ZAMP, 63 (4), 625-653 (2012)
7. N. Chinchaladze, G. Jaiani, Hierarchical Mathematical Models for Solid–Fluid Interaction Problems (Georgian). Materials of the International Conference on Non-Classic Problems of Mechanics, Kutaisi, Georgia, 25–27 October, Kutaisi, 2, 59–64 (2007)

TRANSIENT GAS FLOW MODELING IN INCLINED AND BRANCHED PIPELINE

Teimuraz Davitashvili
I. Javakhishvili Tbilisi State University, I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, Georgia, teimuraz.davitashvli@tsu.ge

Natural gas distribution networks are complex systems with hundreds or thousands of kilometers of pipes, compression stations and many other devices for the natural gas transportation and distribution service. Achievement in the power consumption points with the required conditions is the main practical aspect and the most difficult issue in the gas transmission pipeline system. Determination of gas pressure and flow rate distribution along the pipelines is a necessary step for solving the above mentioned question. Searching of gas flow pressure and flow rate along the inclined and branched pipeline network has much more practical value but represents more difficult issue. For this purpose development of the mathematical models describing gas non-stationary flow in the branched and inclined pipeline systems are actual. The purpose of this study is determination of gas pressure and flow rate special and temporally distribution along the pipeline based on simplified one-dimensional partial differential equations governing the gas non-stationary flow in the inclined and branched pipeline. The simplification is established on the hypothesis that the boundary conditions do not change quickly and the capacity of gas duct is relatively large. Analytical solution of the simplified one-dimensional partial differential equations governing the gas non-stationary flow in the inclined and branched pipeline is obtained. Some results of numerical calculations of gas flow in the inclined and branched pipelines are presented.

CONFLICTS AND CATASTROPHES

Guram Gabrichidze
Georgian National Academy of Sciences, Tbilisi, Georgi,
gabrichgur@gmail.com

The purpose of the work is to study conditions of conflict-free and sustainable development of processes as well as its regulation possibilities.

Extrapolation and generalization of the results obtained in the mechanics give the basis to state that any process or situation may also be characterized by two global parameters - the change of any common features that unite the multiplicity and the attitude of the objects or subjects involved in this union towards this change.

In any process, any kind of distinction is regarded as the cause of the conflict. Representation of the new vector form of matrix shows it clearly.

Conditions that provide the conflict-free and sustainable development of the processes are formulated.

The received results are compared with the rule of relationship, with so-called Golden rule and other models which are considered in modern Game theory.

I. VEKUA'S THEORY OF THE ANALYTIC FUNCTIONS: THE SPACE OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

Grigori Giorgadze
I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, Georgia,
gia.giorgadze@tsu.ge

The idea of using the methods of complex analysis for a wider class of functions then the space of analytic functions takes its origin from the end of 19th century and is actually connected with the period of conception of complex analysis as the independent branch of science. First attempts for the extension of the complex methods were connected with the generalization of the Cauchy-Riemann system and the investigation of the properties of the space of solutions for such a system.

After the appearance of the monographs of I.Vekua and L.Bers, generalized analytic functions due to the terminology of Vekua and pseudo-analytic functions due to Bers these problems are the subject of investigation by many scientists.

We will consider also application of Bers-Vekua theory in the conformal fields theory, in the theory of deformation of complex structures and the theory of two dimensional exactly solvable models of quantum mechanics (see [1]).

References

1. Akhalaia G., Giorgadze G., Kaldani N., Jikia V., Manjavidze N., Makatsaria G. Elliptic systems on Riemann surfaces. Lecture Notes of TICMI, vol. 13, pp.3-154, 2012.

IMPROVEMENT WAYS OF CRANE-TRANSPORT AND ROAD-TRANSPORT MACHINES' WORKING APPLIANCES

Vazha Gogadze
A.Tsereteli state university, Georgia
vajagogadze@rambler.ru, Vazha.gogadze@atsu.edu.ge

In above work is described kinematic and structural researches of crane-transport and road-machines' working appliances.

THE SOLUTION OF ONE PROBLEM OF THEORY OF SHELLS BY METHOD OF I. VEKUA FOR APPROXIMATION N=3

Bakur Gulua
I. Javakhishvili Tbilisi State University, I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, Georgia
Sokhumi State University, Tbilisi, Georgia
bak.gulua@gmail.com

We consider the geometrically nonlinear and non-shallow spherical shells for I. N. Vekua N=3 approximation. The concrete problems, using complex variable functions and the method of the small parameter has ve been solved.

Acknowledgement. The designated project has been fulfilled by a financial support of Shota Rustaveli National Science Foundation (Grant SRNSF/FR/358/5-109/14).

SOME THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR AN ELASTIC BINARY MIXTURES WITH DOUBLE POROSITY

Roman Janjgava
I.Vekua Institute of Applied Mathematics of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia, roman.janjgava@gmail.com

The talk deals with a linear system of equilibrium equations for elastic bodies with double porosity, where the solid body skeleton is a mixture of two isotropic materials. The general solution of this system of equations is represented by means of harmonic functions and a metaharmonic function. On the basis of the general solution and using the method of separation of variables, the class of boundary value problems for a rectangular parallelepiped is analytically solved.

Acknowledgement. The designated project has been fulfilled by a financial support of Shota Rustaveli National Science Foundation

(Grant SRNSF/FR/358/5-109/14).

References

1. Natroshvili D. G., Jagmaidze A. Ya., Svanadze M. Zh.: Some problems of the linear theory of elastic mixtures, TSU press, 1986 (in Russian).
2. Khomasuridze N., Janjgava R. Solution of some boundary value thermoelasticity problems for a rectangular parallelepiped taking into account microthermal effects, Meccanica, **51** (2016), 211-221.\

ON ONE PROBLEM OF THE PLANE THEORY OF ELASTICITY FOR THE REGION WITH A PARTIALLY UNKNOWN BOUNDARY

Giorgi Kapanadze
I. Vekua Institute of Applied Mathematics of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
kapanadze.49@mail.ru

The problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary (the problem of finding an equally strong contour) for a rectangular plate weakened by an equally strong contour (the unknown part of the boundary) is considered. It is assumed that the linear segments of the boundary are under the action of normal contractive forces with the given principal vectors and the unknown part of the boundary is free from external forces. The condition for the unknown contour to be equally strong is that the tangential normal stresses are stable on it.

For solving the problem, the methods of complex analysis are used; the sought complex potentials and equations of an unknown contour are constructed effectively (in the analytical form).

Acknowledgement. This work was supported by a financial support of Shota Rustaveli National Science Foundation (Grant SRNSF/FR/358/5-109/14).

MODELING OF NONELASTIC INTERACTIONS OF OPTICAL SOLITONS

Oleg Kharshiladze*,****,Vasily Belashov**,
Jemal Rogava***, Khatuna Chargazia***,****
*Dept. of Physics, I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia,
**Kazan Federal University, Kazan, Russia,
***I. Vekua Institute of Applied Mathematics of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia,
**** M. Nodia Institute of Geophysics, I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia,
oleg.kharshiladze@gmail.com

Investigation of laser soliton propagation and interaction in optical fibber for the information transmission is a very actual problem. This interaction sufficiently changes the characteristics of the light field and distorts transmitted information. For the control of the soliton shape, stability and dynamics, it is necessary to study an influence of fibber defects, dispersive and nonlinear inhomogeneities, and nonstationary parameters of medium on the character of soliton propagation. The problem reduces to the nonlinear Schrodinger (NLS) equation for the amplitude of the light field with coefficient functions having spatial and temporal inhomogeneities.

Fourier splitting method for the NLS equation was used at numerical modeling, and the inhomogeneities of coefficient functions were taken into account. The NLS equation is divided into linear and nonlinear parts, dispersive and nonlinear effects are considered separately, corresponding operators are assumed commutative. Implicit scheme of finite-difference method is used for investigation of soliton propagation in non-uniform and nonstationary environment.

Numerical modeling shows that inhomogeneity of medium changes the amplitudes of solitons and other light impulses, their velocities of propagation, their quantity that is caused by their nonelastic interaction in inhomogeneous fibber. Nonstationary medium changes a form of impulse and affects its spectral features. Changes of modulation of the parameters of medium make possible variation of character of nonelastic interaction at solitons attraction-repulsion.

References

1. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, – 2013.
2. Belashov V.Yu., Belashova E.S. Solitons: theory, simulation, applications. Kazan, 2016.
3. Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersiv Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag GmbH&Co, 2005.

DYNAMICAL ANALYSIS OF FRICTIONAL AUTO-OSCILLATIONS

Oleg Kharshiladze*,***, Khatuna Chargazia**,***,
Nodar Varamashvili***, Dimitri Amilaxvari*, Levan Dvali*
*Dept. of Physics, I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
**I. Vekua Institute of Applied Mathematics of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
*** M. NodiaInstitute of Geophysics, I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
khatuna.chargazia@gmail.com

An earthquake is commonly described as a stick-slip frictional instability occurring along preexisting crustal faults. The seismic cycle of earthquake recurrence is characterized by long periods of quasi-static evolution (tectonic processes) which precede sudden slip events accompanied by elastic wave radiation: the earthquake. This succession of processes recalls the behavior of nonlinear relaxation oscillations.

In the present work the nonlinear dynamics of three-block systems due to Burridge-Knopoff model of dry frictions without velocity restrictions is also studied using numerical methods and possibility of „stick-slip" motion and triggering of instabilities by recording of acoustic emission, accompanying the slip events is revealed. Observation data analysis is carried out. Spectral features, recurrent quantitative and qualitative characters, wavelet diagrams of obtained signals are studied. Stick–slip occurs only within a narrow range around these critical speeds of a system. External damping can prevent stick–slip motion.

References

1. Varamashvili N., Chelidze T., Devidze M., Chelidze Z., Chikhladze V., Surmava A., Chargazia Kh., Tefnadze D. Mass-movement and seismic processes study using Burridge-Knopoff laboratory and mathematical models. Journal of Georgian Geophysical Society, Issue (A), Physics of Solid Earth, (2015), 19-25.
2. Dieterich J.H. Modeling of rock friction 1. Experimental results and constitutive equations. Journal of Geophysical Research, 84, B5, (1979), 2161-2168.
3. Burridge R., Knopoff L. Model and theoretical seismicity. Bulletin of the Seismological Society of America, 57 (3): (1967), 341-371.
4. Ruina A. Slip instability and state variable friction laws. Journal of Geophysical Research, 88, (1983), 10359-10370.
5. Chelidze T., Varamashvili N., Devidze M., Chelidze Z., Chikhladze V., Matcharashvili T. Laboratory study of electromagnetic initiation of slip. Annals of Geophysics, 45 (2002), 587-599.

CALCULATION OF THE RIBBED SHELL BY A FINITE ELEMENT METHOD

Gela Kipiani, Seit Bliadze
Aviation University of Georgia, Tbilisi, Georgia
gelakip@gmail.com, khuta60@gmail.com

In this article, the development of the stages of calculating plates and shells with stiffeners is described. It is noted that the theory of ribbed shells is one of the most controversial and incomeplete sections of the general theory of shells. The calculations of shells with longitudinal and transverse stiffeners by the finite element method are considered. In the first variant, the stiffener is considered as a beam end element, and the sheath is modeled as a finite element by a thin plate. In the second case, both the ribs and the shell are modeled as a finite element by a thin plate. In the third case, the edges and shells are modeled as a single three-dimensional finite element. In the fourth case, the edges are modeled as a three-dimensional volume element, and the shell as a finite element of the plate. Experimental studies of the indicated shells were carried out in the laboratory of strength at the testing base of the JSC "Tbilaviamsheni", certified according to BS EN ISO 9001 and EN 9100. A compa-

rative analysis of the theoretical and experimental results (Accuracy $\approx 5\%$).

References

1. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, inc. (1973).

MATEHMATICAL MODELING OF THE DYNAMICAL PROCESSES OF AVALANCHE-LIKE CURRENTS

Tariel Kvitsiani

Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia, tarielk@mail.ru

Aiming at studying the dynamic processes of avalanche-like currents, the work gives the data about the conditions of avalanche hazard, in particular, the dependence of avalanching on surface inclination giving a general view of the processes of origination and distribution of avalanches and being quite important in theoretical and quantitative evaluation.

A continuous deformed body model is taken as a main physical-mechanical model of snow avalanches thoroughly showing the nature of plasticity and loosening. The dynamic processes of snow avalanches are described by means of a system of equations of a composite environment (landslide-slide) presented as hydrodynamic equations and its one-dimensional option [1]. These systems consider loose and plastic properties and plasticity as well, which is typical of bingamma liquids at the expense of considering motion limit strain in the dynamic equations. When the parameters of the grain loose environment equals zero, the given system is automatically transformed into the Hencky-Ilyushin equation, which describes so called plastic-viscous liquids (Bocher-Bingaman liquids) typical to "soft" snow avalanches with significant humidity.

The equations of basic physical-mechanical model are made of: the equation of the boundary state of a loose environment with the angle of internal friction and adherence coefficient (Coulomb-Tresk-St. Venant Condition), which defines the mutual connection between the components of tangential and normal stresses, as well as the link between the components of stress tensor with the angle of internal friction, and between the speed deformation tensor components, which show the coincidence of the direction of the maximum speed of motion deformation with one of the directions of the family of sliding lines (Ishlinsky-Geniev Condition), plus considering the plasticity caused by snow humidity [1].

A body of finite sizes is taken as a model of the avalanche body. Its geometric sizes and difference between the center of masses and speeds of moving the frontal areas are considered. The obtained results play the role of such auxiliary factors, without which no correct analysis or interpretation is possible. This concerns such parameters, as the height and length of an avalanche body, coordinate of its longitudinal profile, front speed as the function of distance and time, power parameters influencing the resistances, impact of cold winds on the snow cover, etc. playing an essential role in examining the validity of the obtained results [2,3].

Reference

1. Kvitsiani T. Slope Stability and Avalanche-Like Currents. Publishing House "Technical University". Tbilisi, (2010), p. 140.
2. Losov K.S. Some Questions of Avalanche Motion and Other Similar Phenomena. The Works of All-Union Meeting on Avalanches. Leningrad: Hydrometeodizdat, (1978), 64-69.
3. Moskalev I.R. Origination and Motion of Avalanches. Leningrad: Hydrometeodizdat, (1976), p. 272.

ON THE IMMERSION OF THE SURFACE IN THE 3D RIEMANN DIVERSITY

Tengiz Meunargia
I.Vekua Institute of Applied Mathematics of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia, tengizmeunargia37@gmail.com

The surfaces with non-zero Gaussian curvature are the Riemann's diversity of 2-dimension, which are investment in the 3-D Euclidean space. Therefore, for these varieties of properties it is possible to construct quite clear representations. Further, it is shown that any regular surface can be put in the Riemann's 3-dimensional diversity.

Acknowledgement. The designated project has been fulfilled by a financial support of Shota Rustaveli National Science Foundation (Grant SRNSF/FR/358/5-109/14).

A FEW REMARKS ON RECENT DEVELOPMENTS IN MICROPOLAR CONTINUUM THEORY

Wolfgang H. Müller*, Elena N. Vilchevskaya**
* Institute of Mechanics, Chair of Continuum Mechanics and Constitutive Theory, Berlin Institute of Technology, Einsteinufer 5, 10587 Berlin, Germany, whmueller1000@gmail.com
** Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Bol'shoy pr. 61, V.O., 199178 St. Petersburg, Russia and Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Politekhnicheskaja 29, 195251 St.-Petersburg, Russia, vilchevska@gmail.com

In this presentation we consider micropolar media that can undergo structural changes and do not a priori consist of indestructible material particles. Initially the pertinent literature will be reviewed. Then the necessary theoretical framework for a continuum of that type is presented: The standard macroscopic equations for mass, linear and angular momentum are complemented by a recently proposed balance for the moment of inertia tensor, which contains a production term. Two examples illustrate the effect of the production.

In the first example we study a continuous stream of matter on a conveyor belt going through a crusher so that the total number of particles will change. In context with this example it will also become clear that the traditional Lagrangian way of describing the motion of solids is no longer adequate and must be replaced by the Eulerian point of view known from fluid mechanics. The second example deals with hollow particles, which rotate because of the presence of body couples. Now a transient temperature field is superimposed, such that the moment of inertia field will change due to thermal expansion of the particles. This in turn will result in rotational motion that is no longer constant but varies in space and time.

Acknowledgement. This work was supported by a DFG grant MU1752/43-1 and by Russian Foundation for Basic Research (16-01-00815).

INVESTIGATION OF THE BENDING DEFORMATION OF CUSPED PRISMATIC PLATES BY FINITE ELEMENT METHOD AND THE DEVELOPMENT OF THE REDUCTION METHOD WITH THE USE OF APPROXIMATION BY ANALYTIC FUNCTIONS

Giorgi Nozadze
LEPL G. Tsulukidze Mining Institute
g_nozadze@yahoo.com

The talk deals with the bending deformation of a cusped prismatic plate, which is bounded by surfaces of different curvature and has a plane of symmetry (see, e.g. [1]). It is well-known, that the three-dimensional elasticity problem in such a case can be reduced to a two-dimensional problem of the elasticity of a plane deformed state of a body.

The problem of pure bending of a uniformly loaded special (cusped) segment of the body region is considered. A discrete solution of the problem of elasticity in displacements can be obtained with the help of the finite element method.

According to the discrete solutions, the displacement function can be represented by means of approximation by analytic functions. In particular, sign variable functional power series with a finite number of terms give satisfactory results at discrete points of the solution of the presented problem.

On the basis of the work performed, it can be shown that in solving elasticity problems in specific areas of geometric uncertainty, it is possible to develop reduction analytical methods that could be used to improve the study of the deformed state of the body in these regions, within acceptable results in practice.

Reference

1. Georg Jaiani - Cusped Shell-like Structures, Springer Briefs in Applied Science and Technology, Springer-Heidelberg-Dordrecht-London-New York, 2011, 84 p.

ON APPROXIMATE SOLUTION OF THE ALGORITHMS AND NUMERICAL COMPUTATIONS FOR SOME KIRCHHOFF TYPE NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTION EQUATIONS

Archil Papukashvili*, Giorgi Papukashvili**, Jemal Peradze***

* I. Javakhishvili Tbilisi State University, I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Faculty of Exact and Natural Sciences

** V. Komarovi N 199 Public School, Georgian Technical University

*** I. Javakhishvili Tbilisi State University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Georgian Technical University

Tbilisi, Georgia

archil.papukashvili@tsu.ge, gagapapukashvili@gmail.com, j_peradze@yahoo.com

In the present talk we consider approximate solution issues for the following two problems: 1.Nonlinear boundary value problem for the Kirchhoff type static beam (see, for example [1], [2]). The problem is reduced by means of Green's function to a nonlinear integral equation. To solve this problem we use the the Picard type iterative method; 2. Nonlinear initial-boundary value problem for the J.Ball dynamic beam (see, for example [3], [4]). Solution of problem

is founded by means of an algorithm, the constituent parts of which are the Galerkin method, a symmetric difference scheme and Jacobi iterative method.

For both of these problems the new algorithms of approximate solutions are constructed and numerical experiments are carried out. The results of calculations are presented by tables and diagrams.

Reference

1. Peradze J. A numerical algorithm for a Kirchhoff – type nonlinear static beam. J. Appl. Math. 2009, Art.ID 818269, 12 pp.
2. Ma T.F. Positive solutions for a nonlocal fourth order equation of Kirchhoff type. Discrete Contin. Dyn. Syst. (2007), 694-703.
3. Ball J. M. Stability Theory for an Extensible Beam, J. Diff. Eq., **14** (1973), 399-418.
4. Papukashvili G., Peradze J., Tsiklauri Z. On a stage of a numerical algorithm for Timoshenko type nonlinear equation, Proc. A.Razmadze Math.Inst., Tbilisi, **158** (2012), 67-77.

MODELING AND ANALYSIS OF COMPLEX CABLE-ROD STRUCTURES AND OTHER SIMILAR BUILDING STRUCTURES BASED ON DISCRETE REPRESENTATION AND SPECIAL ALGORITHMS

David Pataraia

G. Tsulukidze Mining Institute, Tbilisi, Georgia,

david.pataraia@gmail.com

The subject od research in the first place are complex cable-rod structures such as cableways, cable truss bridges, spacecraft cable systems and antennas, protective roofs of stadiums and other having large sizes objects, avalanche-protection structures and arresting netting. In general, the subject of research of presented work is modeling and analysis of having similar complex configuration solid deformable bodies.

The modeling and analysis of such objects by standard methods and software is often associated with significant problems due to the cause of hysterisis, clearances, friction and other essential nonlinear relations. In addition, the analysis of large size objects, especially when the accuracy of the results is needed, also rises the increased and often hard-to-conduct requirements for applied computing methods and appropriate computer engineering.

The relevance of the research also is providing the complexity of adaptability and application for solution of specific tasks of appropriate universal methods and computational software packages, especially when the object ubder study has non-linear characteristics and even large size.

The novelty of the study lies in the method of static and dynamic calculation of complex rope-rod structures and other similar building structures developed by us, which is based on the discrete representation of solid deformable bodies and a special computing algorithm [1], [2], [3].

On the basis of the proposed approach, we developed an algorithm and a countable program for the static and dynamic calculation of solid deformable bodies with a complex configuration and with nonlinear characteristics. The effectiveness and suitability of the approach was confirmed by practical testing on specific objects and comparison with the results obtained by the standard software.

Acknowledgement. A significant part of this work was accomplished thanks to the support of the Rustaveli Foundation and cooperation with the staff of the Institute of Applied Mathematics of Tbilisi State University and with its director Professor G. Jaiani.

Reference

1. David Pataraia. The calculation of rope-rod structures of ropeways on the basis of the new approach.WORLD CONGRESS of O.I.T.A.F., RIO DE JANEIRO, BRAZIL, October, 2011, 24 – 27, PAPERS OF THE CONGRESS; http://www.oitaf.org/Kongress%202011/Referate/Pataraia.pdf
2. D. Pataraia. Ein Beitrag zur diskreten Darstellung des Seiles. Wissenschaftliche Arbeiten des Instituts fuer Eisenbahnwesen, Verkehrswirtschaft und Seilbahnen, Technische Univesitaet Wien, 1981.
3. David Pataraia. Dynamische Analyse und Simulation von Seil-Stab-Strukturen von Seilbahnen auf Basis diskreter Darstellung und sukzessiven Approximationsalgorithmus WORLD CONGRESS of O.I.T.A.F., Bolzano, Italy, 6-9 Juni, 2017 PAPERS OF THE CONGRESS; http://oitaf2017.com/wp-content/uploads/2017/06/oitaf-kongr-bolcano-040617- vort-germ- JN-050617- 2.pdf

JACOBI ITERATION FOR A BEAM DYNAMIC PROBLEM

Jemal Peradze
I. Javakhishvili Tbilisi State University, Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia, j_peradze@yahoo.com

An initial boundary value problem for the differential equation [1, 2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)-h\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x,t)-\left(\lambda+\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)\right)^2 d\xi\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0$$

describing the dynamic behavior of beam is considered. As a result of approximation of the solution with respect to the spatial and time variables a nonlinear system of discrete equations is obtained, which is solved by iteration. The convergence conditions and the error estimate of the iteration are obtained.

References

1. Henriques de Brito E.: A nonlinear hyperbolic equation, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 3 (3), (1980), 505-520.
2. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W.: Vibration problems on engineering. John Wiley & Sons, Inc., 1974.

ON SOLUTION OF A SYSTEM OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS FOR A TIMOSHENKO BEAM

Jemal Peradze*'**, Zviad Kalichava*
*Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia,
**Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia
j_peradze@yahoo.com, zviadi.kalichava@gmail.com

We consider an initial boundary value problem for the nonlinear dynamic beam [1, 2]. The solution is approximated by a variational method and implicit symmetric different scheme. The system of equations obtained by discretization is solved by an iteration method using Sherman-Morrison formula. The accuracy of the iteration method is studied.

References

1. Peradze J.: On the accuracy of the Galerkin method for a nonlinear dynamic beam equation. Math. Meth. Appl. Sci., **34**, issue 14, (2011), 1725-1732.
2. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W.: Vibration problems on engineering. John Wiley & Sons, Inc., (1974).

ON THE STABILITY OF NONIZOTHERMAL FLOWS BETWEEN POROUS CYLINDERS

Luiza Shapakidze
I. Javakhishvili Tbilisi State University, A.Razmadze Mathematical Institute, Tbilisi, Georgia, luiza@rmi.ge

In this report we present the investigations of instability and complex chaotic regimes arising after the loss of stability of viscous heat-conducting fluids between two porous heated rotating vertical and fixed horizontal cylinders by pumping a fluid around the annulus.

THE BOUNDARY VALUE CONTACT PROBLEM OF ELECTROELASTICITY FOR PIECEWISE-HOMOGENEOUS PLATE WITH ELASTIC INCLUSION AND CUT

Nugzar Shavlakadze
Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, A. Razmadze Mathematical Institute, Tbilisi, Georgia, nusha@rmi.ge

We will consider a piecewise-homogeneous plate of piezo-electric material, weakened by infinite crack and reinforced by an infinite inclusion (beam) as an electrode by a normal force of intensity $p_0(x)$ The normal stresses $q_0(x)$ and the electric potential are given at the edges of the crack.

The problem consists of determining the expansion of cut $f(x)$ and the jump $p(x)$ of normal contact stresses along the contact line, of establishing their behavior in the neighborhood of singular points.

According to the equilibrium equation of inclusions elements we have

$$\frac{d^2}{dx^2} D(x) \frac{d^2 v^{(1)}(x)}{dx^2} = p_0(\mathrm{x}) - p(x), \quad x > 0 \tag{1}$$

and the equilibrium equation of the inclusion has the form

$$\int_0^\infty [\mathrm{p}(t) - p_0(t)]dt = 0, \quad \int_0^\infty \mathrm{t}[\mathrm{p}(t) - p_0(t)]dt = 0, \tag{2}$$

where $v^{(1)}(x)$ is the vertical displacement of inclusion points; $p(x)$ is the jumps of normal contact stresses, subjects to determination. $D(x)$ is bending rigidity of the inclusions material.

On the boundary of a crack we have

$$\sigma_y^{(2)+}(x) + \sigma_y^{(2)-}(x) = 2q_0(x), \quad x < 0 \tag{3}$$

On the interface of two material the following conditions are valid

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \qquad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \qquad u^{(1)} = u^{(2)}, \qquad v^{(1)} = v^{(2)}$$
$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)}, \qquad D_x^{(1)} = D_x^{(2)} \tag{4}$$

where $\sigma_x^{(j)}, \tau_{xy}^{(j)}$ are stress components , $u^{(j)}, v^{(j)}$ are displacement components, $E_y^{(j)}, D_x^{(j)}$ are components of vectors of electrical stress and of electrical inductive (j=1,2).

On the bases of the conditions (1-4) introducing the notation $\psi(t) = f(-t)$, we have the system of singular integral equations with fixed singularity [1,2]

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty \left[\frac{\lambda_1}{t-x} + R_1(t,x)\right] p(t)dt + \int_0^\infty R_2(-t,x)\psi(t)dt\right) = \frac{1}{D(x)}\int_0^x dt \int_0^t [p_0(\tau) - p(\tau)]d\tau, \qquad x > 0 \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{\lambda_3}{t-x} + R_4(-t,-x)\right]\psi(t)dt + \int_0^\infty R_3(t,-x)\,\mathrm{p}(t)dt = \mathrm{q}_0(-x), \quad x > 0 \tag{6}$$

For solving the system (5)-(6), when $D(x) = D = const$, $x > 0$, making notation $\varphi(x) = \int_0^x dt \int_0^t [p_0(\tau) - p(\tau)]d\tau$, using generalized Fourier transform [3] for the function $F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(e^\varsigma) e^{i\varsigma s} d\varsigma$, we obtain the boundary condition of Karleman type problem for a strip

$$G(s)F(s+3i) - F(s) = P(s), \qquad -\infty < s < \infty \tag{7}$$

Therefore, we consider the problem: find the function $F(z)$, which is holomorphic in the strip 0< Imz <3, vanishing at infinity, continuously extendable on the border of the strip and satisfying condition (7).

Using the method of factorization the solution of this problem is represented in an explicit form [4].

Applying the inverse integral transformation for normal contact stresses we obtain the following estimate:

$$p_0(x) - p(x) = \varphi''(x) = O(x^{-1/2}), \qquad x \to 0+$$

The crack opening behavior has the form

$$f(x) = O(x^{-1/2+\omega}), \qquad x \to 0-, \qquad 0 < \omega < 1/2.$$

Reference

1. Parton V. Z., Kudriavzev B. A. Electromagneto-elasticity of piezo-electric and electro-conductive bodies. Moscow, Nauka, (1988), p. 470 .
2. Muskhelishvili N. Singular integral equations. Moscow, Nauka, (1966), p. 591.
3. Gakhov F.D., Cherskii Yu.I. Convolution Type Equation. Moscow, Nauka, (1978), p.296.
4. Bantsuri R. The boundary problems of the theory of analytic functions.// Soobsh. Acad. Nauk. GSSR. **73** (3), (1974), 549-552.

BUCKLING PARADOX AND ANISOTROPIC PLASTIC PLATE BIFURCATION

Suresh Shrivastava
Department of Civil Engineering and Applied Mechanics
McGill University
Montreal, Quebec, Canada H3A 2K6
suresh.shrivastava@mcgill.ca

The plastic plate buckling paradox originated from the work of Handelman and Prager [1]. They found that the bifurcation stresses predicted by the isotropic Mises incremental theory, the “correct” J_2 theory of strain hardening plasticity, were absurdly higher than those from the “incorrect” J_2 deformation theory of plasticity. Experiments generally favour the predictions of the deformation theory. Hence, the plastic plate buckling paradox: a correct theory yields the wrong results, while an incorrect one gives the right results. Onat and Drucker [2] explained the paradox by showing that by taking “unavoidable” out-of-plane geometric imperfection into account in a nonlinear growth analysis of a plate, the incremental theory gives maximum loads matching the deformation theory bifurcation loads. The growth analysis is quite complicated, and can only be done numerically. Efforts have been made to lower the buckling loads of the J_2 incremental theory by various other means, but without much success.

Here, using an analytical variational approach, bifurcation analyses for plate buckling are performed by considering the anisotropic behaviour of the plate material. For this purpose Hill's incremental theory [3] for anisotropic strain hardening of sheet metals is used. The principal axis of anisotropy x is taken as the rolling direction; y is the transverse principal axis. These anisotropy axes are assumed to remain fixed, uninfluenced by the loading of the plate for bifurcation. Plane stress conditions are assumed to prevail. The loading is biaxial $\sigma_{\nu\nu} = \alpha\sigma_{\xi\xi}, -1 \le \alpha \le 1$, with $\xi\nu$ axes parallel to the sides of the rectangular plate, simply supported at $\xi = 0, a$ and at $\nu = 0, b$. The $\xi\nu$ axes are at an angle β (which may or may not be zero) with respect to the xy principal axes of anisotropy.

Three cases are considered: (1) equibiaxial compression, $\alpha = 1$, (2) equal compression tension, $\alpha = -1$, and (3) uniaxial compression, $\alpha = 0$. The plastic plate buckling paradox is examined for each of the cases. It is shown that by a suitable choice of initial anisotropic yield stresses, the resulting bifurcation stresses can be rendered quite close to those predicted by the J_2 deformation theory, which in turn are considered close to the experimental results.

References

1. Handleman G. H. and Prager. W. Plastic buckling of a rectangular plate under edge thrusts: NACA Report 946 (1949).
2. Onat E. T. and Drucker. D. C. Inelastic instabilities and incremental theories of plasticity: Journal of the Aeronautical Sciences, 20 (1953), 181-186.
3. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, London (1950).

DIFFRACTION OF NONLINEAR WAVES BY A SEMI-SUBMERGED HORIZONTAL RECTANGULAR CYLINDER

Wojciech Sulisz

Polish Academy of Sciences, Institute of Hydroengineering

80328 Gdansk, Poland, sulisz@ibwpan.gda.pl

The design of ships and offshore structures requires information regarding wave loads on a structure. A boundary-value problem for the interaction of nonlinear water waves with a semi-submerged horizontal rectangular cylinder is formulated. An analytical solution is achieved up to second-order in wave steepness. The main attention is paid to the modelling of large nonlinear wave load components.

The solution reveals a significant second-order load on a cylinder. The second-order load component may exceed many times the corresponding first-order quantities. This phenomenon occurs within the commonly accepted range of the applicability of a second-order wave theory.

Theoretical results are in a fairly good agreement with experimental data. A reasonable agreement between theoretical results and experimental data is observed even for steep waves.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF STEADY VIBRATIONS IN THE THEORY OF THERMOVISCOELASTICITY OF BINARY MIXTURES

Maia Svanadze

Faculty of Exact and Natural Sciences, Tbilisi State University

I. Chavchavadze Ave., 3, Tbilisi 0179, Tbilisi, Georgia

maia.svanadze@gmail.com

The present talk concerns the linear theory of thermoviscoelasticity of binary mixture which is modelled as a mixture of an isotropic elastic solid and a Kelvin-Voigt material. The basic boundary value problems (BVPs) of steady vibrations of the considered theory are investigated and some basic results of the classical theory of thermoviscoelasticity are generalized. The fundamental solution of the system of equations of steady vibrations is constructed by elementary functions. The Green formulae and the formulae of integral representations of regular vector and regular (classical) solutions are obtained. The uniqueness theorems for solutions of the internal and external basic BVPs of steady vibrations are proved. The basic properties of potentials and singular integral operators are presented. Finally, the existence theorems for the above mentioned BVPs are proved by means of the potential method and the theory of singular integral equations.

Acknowledgments. This research has been fulfilled by financial support of Shota Rustaveli National Science Foundation (Grant # YS15_2.1.1_100).

THE STATIONARY FLOW OF LAMINAR LIQUID IN AN CIRCULAR PIPE OF INFINITE LENGTH

Varden Tsutskiridze*, Levan Jikidze**, Eka Elerdashvili***
* Department of mathematics, Georgian Technical University,
77 M. Kostava st., 0175 Tbilisi, Georgia
b.tsutskiridze@mail.ru, btsutskirid@yahoo.com
**Department of engineering mechanics and technical expertise in construction, Georgian Technical University, 77 M. Kostava st., 0175 Tbilisi, Georgia, levanjikidze@yahoo.com
***Department of mathematics, Georgian Technical University,
77 M. Kostava st., 0175 Tbilisi, Georgia, ek.Elerdashvili@yahoo.com

In the article the stationary flow of viscous incompressible electrically is considered conducting liquid in infinite length pipe at existence of transversal magnet field. The motion is originated due applied in the initial moment of time constant longitudinal drop of pressure. The exact solution of the problem in the general form is obtained [1-5].

References

1. Loitsiansky L.G. Mechanic of a fluid and gas. Moscow: Sciences, (1987), 840 p. (in Russian).
2. Vatazin A. B., Lubimov G. A., Regirer C. A. Magnetohydrodynamic Flow in Channels. Moscow: Nauka, (1970), 672 p. (In Russian).

3. Tsutskiridze V., Jikidze L. The conducting liquid flow between porous wells with heat transfer. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, **167** (2015), 73-89.
4. Sharikadze J., Tsutskiridze V., Jikidze L. The flow conducting liquid in magnetohydrodynamics tubes with heat transfer//International Scientific Journal IFToMM “Problems of Mechanics”, Tbilisi, 2011, № 3 (44), pp. 63--70.
5. Tsutskiridze V., Jikidze L. The nonstationary flow of a conducting fluid a plane pipe in the presence of a transverse magnetic field. Elsevier (www. Elsevier. Com/locate/trmi) Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, **170**, Issue 2, September (2016), 280-286.

ON THE JUSTFICATION AND STABILITY OF THE REFINED AND HIERACHICAL THEORIES FOR THINWALLED ELASTIC STRUCTURES

Tamaz Vashakmadze
I. Javakhishvili Tbilisi State University, I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, Georgia, tamazvashakmadze@gmail.com

In this report we consider the problems connected with justification and stability of the finite (T. von Kármán–E. Reissner–R. Mindlin type) and hierarchical (I. Vekua, I. Babuška) mathematical models, corresponding to elastic shells, plates and pivotal systems. Based on [1, 2] we demonstrate that for boundaring variational methods of construction for these models is essential to a priori define the admissible class of functions and existence of proof of the desired extremals. These conditions are not sufficient for the stability of corresponding processes and require (i.e. in case of the natural boundary conditions) specific (see, e.g. [3,4]) corrections.

References

1. Young, L.: Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory, W.R. Sanders Company, 340 pp., Philadelphia-London-Toronto (1969).
2. Vashakmadze, T.: On the Origin of the Theory of Distributions or the Heritage of Andrea Razmadze, Bull. Georg. Natl. Acad.Sci., **11** N2, (2017), 12-14.

3. Rectorys, K.: Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering, Dr. Reidel Publ. Company, 592 pp., Prague (1980).
4. Vashakmadze, T.: The Theory of Anisotropic Elastic Plates, Springer-Sci.+Business Media,B.V.,256 pp, (2010).

STUDY OF STRESS STRAIN STA`TE OF SPONGY BONE AROUND IMPLANT UNDER OCCLUSAL LOAD

Natela Zirakashvili
I. Javakhishvili Tbilisi State University, I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, Georgia, natzira@yahoo.com

The main purpose of this work is mathematical modeling and study of stress-strain state of spongy bone of the jaw with implant. Spongy bone may be considered as a multiporous medium where fractures and intervening porous blocks are the most obvious components of the dual-porosity system [1]. The spongy bone consists of solid and liquid phases. The paper, in the solid phase, presents the equations, which describe of the effect of fluid pressure on the solid deformation within each individual component and in the fluid phase, a separate equation written for each component of distinct porosity or permeability [2]. This paper studies the stress-strain state of the spongy bone of the jaw near the implant in the case of occlusal load. Mathematical model of this problem represents a contact problem of elasticity between the implant and the body of the jaw. Boundary element methods, which are based on the solutions to the problems of Flamant (BEMF) and Boussinesq (BEMB), are used to obtain numerical values of stresses in the bone tissue under the occlusal load on the implant. There are considered cases, when the diameter of implant is equal to 0.4 cm, 0.6 cm, 0.8 cm and 1 cm. The contours (isolines) of stresses in the bone tissue are constructed and the results, obtained through BEMF and BEMB for the implants with different diameters, are compared with each other.

References

1. Aifantis E.C. On the problem of diffusion in solids. Acta Mech., **37** (1980), 265-296.

2. Mao Bai, Derex Elsworth, Jean-Claude Roegiers: Multiporosity\Multipermeability Approach to the Simulation of Naturally Fractured Reservoirs. Water Resources Research, **29** (6) (1993), 1621-1633.

ილია ვეკუას ცხოვრება, მოღვაწეობა და სამეცნიერო მემკვიდრეობა

გიორგი ჯაიანი
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი &
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
george.jaiani@gmail.comyge

მოხსენება ეძღვნება გამოჩენილი ქართველი მეცნიერის, მსოფლიოში აღიარებული მათემატიკოსისა და მექანიკოსის, აკადემიკოს ილია ვეკუას ცხოვრების, სამეცნიერო-ორგანიზაციული და პედაგოგიური მოღვაწეობისა და სამეცნიერო მემკვიდრეობის მოკლე მიმოხილვას. მოხსენება მომზადდა მისი დაბადებიდან 110 წლისთავთან დაკავშირებით.

ი. ვეკუას მეთოდის განვითარების შესახებ დრეკადი სტრუქტურების იერარქიული მოდელების ასაგებად

გია ავალიშვილი*, მარიამ ავალიშვილი**
*ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, თბილისი, საქართველო, gavalish@yahoo.com
**საქართველოს უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო, mavalish@yahoo.com

წარმოდგენილ მოხსენებაში მოყვანილია შედეგები ი. ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდის, მისი გავრცელებების და განზოგადებების გამოყენების შესახებ დრეკადი სტრუქტურების იერარქიული მოდელების ასაგებად. ი. ვეკუას მიერ [1] ნაშრომში აგებული იყო ორგანზომილებიან მოდელთა იერარქია წრფივი დრეკადი ერთგვაროვანი ცვალებადი სისქის ფირფიტებისათვის. ამ ნაშრომში სამგანზომილებიანი მოდელის შესაბამისი განტოლებების გამრავლებით ლეჟანდრის პოლინომებზე ფირფი-

ტის სისქის x_3 ცვლადის მიმართ, მათი ინტეგრებით და გადაადგილების ვექტორ-ფუნქციის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტების გაშლით ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებში x_3 ცვლადის მიმართ და მწკრივების კერძო ჯამების განხილვით აგებული იყო ფირფიტის ორგანზომილებიან მოდელთა იერარქია. შევნიშნოთ, რომ კლასიკური კირხჰოფ-ლავის და რეისნერმინდლინის მოდელები შეიძლება ჩაიდგას ი. ვეკუას მიერ მიღებულ იერარქიაში ისე, რომ ისინი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფირფიტის გავრცელებული საინჟინრო მოდელების დაზუსტება. ფირფიტებისა და გარსების ი. ვეკუას მიერ აგებული მოდელები მოყვანილია მის მონოგრაფიაში [2].

ი. ვეკუას მიერ აგებული მათემატიკური მოდელების გამოკვლევის პირველი შედეგები მიღებული იყო დ. გორდეზიანის მიერ [3, 4], სადაც დამრეცი ზოგადი გარსების სტატიკური ორგანზომილებიანი მოდელები გამოკვლეული იყო სობოლევის სივრცეებში და კლასიკურ საკმარისად გლუვ ფუნქციათა სივრცეებში შესწავლილი იყო ურთიერთკავშირი სტატიკურ სამგანზომილებიან მოდელსა და ორგანზომილებიან მოდელებს შორის ერთგვაროვანი იზოტროპული წრფივი დრეკადი მუდმივი სისქის ფირფიტების შემთხვევაში. შემდგომში, ვარიაციული მიდგომის და ი. ვეკუას იდეის და მისი განზოგადების [5] გამოყენებით ფირფიტების და გარსების ორგანზომილებიანი და ძელების ერთგანზომილებიანი სტატიკური და დინამიკური მოდელები აგებული და გამოკვლეული იყო კლასიკური წრფივი დრეკადობის თეორიის, თერმოდრეკადობის, ნარევთა თეორიის, მიკროტემპერატურებიანი თერმოდრეკადობის და თერმოდრეკადობის არაკლასიკური თეორიების ფარგლებში. ფირფიტების, გარსებისა და ძელებისათვის განზომილების რედუქციის ალგორითმების გამოკვლევისას მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით აგებული და გამოკვლეული იყო სხვადასხვა გეომეტრიული ფორმის მქონე ნაწილებისაგან შედგენილი დრეკადი მულტისტრუქტურების პლური-განზომილებიანი იერარქიული მოდელები.

მადლობა. კვლევა განხორციელდა შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით [217596, თერმოდრეკადი პიეზოელექტრული სტრუქტურების იერარქიული მოდელების აგება და გამოკვლევა].

ლიტერატურა

1. Vekua, I.N.: On a way of calculating of prismatic shells, Proc. A. Razmadze Inst. Math. Georgian Acad. Sci., **21** (1955), 191-259 (Russian).
2. Vekua, I.N.: Shell theory: General methods of construction, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985.
3. Gordeziani, D.G.: On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **215** (1974), 6, 1289-1292 (Russian).
4. Gordeziani, D.G.: To the exactness of one variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **216** (1974), 4, 751-754 (Russian).
5. G. Jaiani, On a mathematical model of bars with variable rectangular cross-sections, ZAMM, **81** (2001), 3, 147-173.

ზოგიერთი ამონახსნის აგება სიცარიელის მქონე სხეულებისათვის

ლამარა ბიწაძე
ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი,
თბილისი, საქართველო, lamarabitsadze@yahoo.com

მოხსენება ეძღვნება დრეკადობის თეორიის კვაზისტატიკის განტოლებებს სიცარიელის მქონე სხეულებისათვის. მიღებულია ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენის ფორმულები. აგებულია ფუნდამენტურ და სინგულარულ ამონახსნთა მატრიცები ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით.

ლიტერატურა

1. Ieshan D., A Theory of Thermoelastic Materials with voids, Acta Mechanica , 60 (1986),67-89.

2. Cowin and Nunziato, Linear theory of elastic materials with voidsJ. Elasticity, vol. 13, pp. 125–147, 1983.

დადუღებული ფენის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრა მოგორვისას ცოცვადობის თეორიით

გულმირა ბულეკბაევა*, <u>ომარ კიკვიძე**</u>
*შ. ესენოვის სახ. კასპიის ინჟინერინგისა და ტექნოლოგიების სახელმწიფო უნივერსიტეტი აქტაუ, ყაზახეთის რესპუბლიკა, miragul@mail.ru
**აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი ქუთაისი, საქართველო, kikvidze61@mail.ru

დადუღების ტექნოლოგიური პროცესით ხდება დეტალების გაცვეთილი ზედაპირების აღდგენა. დადუღებული ფენის მექანიკური მახასიათებლებისა და ზედაპირის ხარისხის გაუმჯობესების მიზნით საჭიროა ფენის პლასტიკური დეფორმირება, რაც ხშირად ხორციელდება მოგორვით. მოგორვისას პლასტიკური დეფორმირება წარმოებს ხისტი ცილინდრული გორგოლაჭით, რომელიც ასრულებს ბრტყელ პარალელურ მოძრაობას მუდმივი ხაზოვანი და კუთხური სიჩქარით.

განხილულია მასის ორგანზომილებიანი, დამყარებული, ბლანტ-პლასტიკური დინება განმტკიცების თეორიის საფუძველზე [1]:

$$\sigma_e = a\xi_e^m \kappa^n$$

სადაც $\kappa = \int \xi_e dt$ - ოდკვისტის პარამეტრია, σ_e - ექვივალენტური ძაბვაა, ξ_e - ექვივალენტური დეფორმაციის სიჩქარეა, a, m, n - მასალის მუდმივებია.

წონასწორობის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებები ჩაწერილია დინების სიჩქარის კომპონენტების მიმართ, რომლებშიც შედის ასევე საშუალო ძაბვა [2].

ჩაწერილია სასაზღვრო პირობები განტოლებების რიცხვითი ინტეგრირებისათვის. დინების სიჩქარეების პოვნის შემდეგ სენ-ვენან–ლევი–მიზესის განტოლებებით გამოითვლება ძაბვის დევიატორის კომპონენტები. ამოცანის ამოხსნით განისაზღვრება ფენის დეფორმირებისათვის საჭირო ძალის სიდიდე და გორგოლაჭზე მოქმედი მგრეხი მომენტის სიდიდე, შესაბამისად ტექნოლოგიური პროცესის ენერგეტიკული მახასიათებელი.

ლიტერატურა

1. Малинин Н.Н. Ползучесть в обработке металлов.-М.:Машиностроение, 1986.- 216 с.
2. Киквидзе О.Г., Булекбаева Г.Ж., Кипиани П.Н. Пластическое деформирование наплавленного слоя на плоской поверхности. //Georgian Engineering News, №1 (Vol. 77).-2016.-pp.64-66.

კონფლიქტები და კატასტროფები

გურამ გაბრიჩიძე
საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია,
gabrichgur@gmail.com

მოხსენების მიზანია, შევისწავლოთ ნებისმიერი ვითარების, პროცესის, თუ მდგომარეობის მდგრადი და უკონფლიქტო განვითარების პირობები და მათი რეგულირების შესაძლებლობები.

მექანიკაში მიღებული შედეგების ექსტრაპოლაცია და განზოგადოება საფუძველს იძლევა განვაცხადოთ, რომ ნებისმიერი ვითარება, პროცესი თუ მდგომარეობა შესაძლებელია დავახასიათოთ ორი გლობალური პარამეტრით– სიმრავლის გამაერთიანებელი რაიმე საერთო თვისების შეცვლითა და ამ გაერთიანებაში მონაწილე ობიექტების, თუ სუბიექტების დამოკიდებულებით ამ ცვლილების მიმართ.

ნებისმიერ პროცესში, თუ ვითარებაში, კონფლიქტის წარმოშობის საბაბად მიჩნეულია რაიმე სახის განსხვავებულობა, რომელსაც კარგად აჩვენებს შესაბამისი მათემატიკური მატრიცის წარმოდგენის ახალი, ვექტორული ფორმა.

ჩამოყალიბებულია პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ უკონფლიქტო პროცესის გარკვეული მიმართულებით მდგრად განვითარებას.

მიღებული შედეგები შედარებულია ადამიანების ურთიერთობის ცნობილ, მაგალითად ე.წ. ოქროს წესთან და თამაშების თანამედროვე თეორიაში განხილულ სხვა მოდელებთან.

ანალიზურ ფუნქციათა ი.ვეკუას თეორია: განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა სივრცე

გრიგორ გიორგაძე
ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი
თბილისი, საქართველო, gia.giorgadze@tsu.ge

ანალიზურ ფუნქციათა მეთოდების გავრცელების იდეა ფუნქციათა უფრო ფართო კლასზე სათავეს მე-19 საუკუნიდან იღებს და ფაქტიურად ემთხვევა კომპლექსური ანალიზის როგორც მათემატიკის დამოუკიდებელი დარგის ჩამოყალიბებას. კომპლექსური ანალიზის მეთოდების გავრცელების პირველი მცდელობები დაკავშირებული იყო განზოგადებული კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სივრცის თვისებების შესწავლასთან.

ი. ვეკუასა და ლ. ბერსის ცნობილი მონოგრაფიების შემდეგ განზოგადებული ანალიზური ფუნქციები, ი. ვეკუას ტერმინოლოგიით და ფსევდოანალიზური ფუნქციები, ბერსის აზრით, მსოფლიოს მრავალი წამყვანი მათემატიკური ცენტრის კვლევის ობიექტი გახდა.

მოხსენებაში განხილული იქნება განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის გამოყენება კონფორმუ-

ლი ველის თეორიაში, კომპლექსური სტრუქტურების დე-ფორმაციის თეორიასა და კვანტური მექანიკის ზუსტად ამოხსნადი ორგანზომილებიანი მოდელების თეორიაში (იხ.[1]).

ლიტერატურა

1. Akhalaia G., Giorgadze G., Kaldani N., Jikia V., Manjavidze N., Makatsaria G. Elliptic systems on Riemann surfaces. Lecture Notes of TICMI, vol. 13, pp.3-154, 2012.

ამწე-სატრანსპორტო და საგზაო მანქანების სამუშაო მოწყობილობების სრულყოფის გზები

ვაჟა გოგაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
თბილისი, საქართველო,
vajagogadze@rambler.ru, Vazha.gogadze@atsu.edu.ge

მოხსენებაში აღწერილია ამწე-სატრანსპორტო და საგზაო მანქანების სამუშაო მოწყობილობების კინემატიკური და სტრუქტურული კვლევა.

ცნობილია, რომ ამწე-სატრანსპორტო და საგზაო მანქანების სამუშაო მოწყობილობები წარმოადგენს რთულ სივრცით ღეროვან სისტემებს, რომელთა რგოლები სახსრულადაა ერთმანეთთან დაკავშირებული. რგოლების შეერთებისას ძირითადად გამოიყენება ცილინდრული სახსრები, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია და სფერული სახსრები თავისუფლების ხარისხით სამი.

მიზანშეწონილია აღნიშნულ მანქანებში გამოყენებულ იქნას ორმაგი ცილინდრული სახსრები, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ორის ტოლია. ორმაგი ცილინდრული სახსრების გამოყენება ზრდის მანქანის ფუნქციონალურ დანიშნულებას, მის მწარმოებლობას, ამარტივებს კონსტრუქციას, რის შედეგადაც იზრდება მანქანის სიმტკიცე და საიმედოობა.

ამწე-სატრანსპორტო და საგზაო მანქანების სამუშაო აღჭურვილობების სტრუქტურულმა კვლევამ აჩვენა, რომ რიგ შემთხვევაში აღნიშნულ კონსტრუქციებში ადგილი აქვს ზედმეტი ბმების არსებობას, რის გამოც რგოლების მოძრაობა სახსრებში ხდება არსებული ღრეჩოების მეშვეობით, ან ლითონის კონსტრუქციების წინასწარ დაძაბული მდგომარეობით, რაც მოითხოვს კონსტრუქციის დამზადების სიზუსტეს და ამცირებს მანქანის სიმტკიცესა და საიმედოობას.

ამიტომ მიზანშეწონილია შეიქმნას ისეთი რაციონალური კონსტრუქციები, რომლებსაც არ გააჩნიათ ზედმეტი ბმები, თვითრეგულირებადია და არ იწვევს სამუშაო აღჭურვილობის ლითონის კონსტრუქციების წინასწარ დაძაბულ მდგომარეობას.

ლიტერატურა

1. ვაჟა გოგაძე, გიორგი გოგაძე, ბულდოზერის სამუშაო აღჭურვილობა, პატენტი P563;
2. ვაჟა გოგაძე, გიორგი გოგაძე, ციცხვიანი სატვირთველი, პატენტი P5696;
3. ვაჟა გოგაძე, თვითსაცვლელი, პატენტი U1552;
4. ვაჟა გოგაძე, გიორგი გოგაძე, სკრეპერის სამუშაო აღჭურვილობა, პატენტი P5634;
5. ვაჟა გოგაძე, მამუკა გოგაძე, ალექსანდრე კვირიკაშვილი, საფხვიერებელი, პატენტი P6335;
6. ვაჟა გოგაძე, გიორგი გოგაძე, მამუკა გოგაძე, ერთციცხვიანი ექსკავატორის სამუშაო აღჭურვილობა, პატენტი P6007;
7. ვაჟა გოგაძე, მამუკა გოგაძე, ბუთხუზ პაჭკორია, ჩანგლებიანი სატვირთველის სამუშაო აღჭურვილობა, პატენტი P6380;
8. ვაჟა გოგაძე, მამუკა გოგაძე, ლედი ირემაძე, ავტოგრეიდერის სამუშაო აღჭურვილობა, პატენტი P6400.

გარსთა თეორიის ერთი ამოცანის ამოხსნა ი. ვეკუას მეთოდით N=3 მიახლოებაში

ბაკურ გულუა
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი, თბილისი, საქართველო
სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო
bak.gulua@gmail.com

განხილულია გეომეტრიულად არაწრფივი არადამრეცი სფერული გარსები ი. ვეკუას N=3 მიახლოებაში. მცირე პარამეტრის მეთოდისა და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციების გამოყენებით ამოხსნილია ზოგიერთი ამოცანა.

მადლობა. წინამდებარე ნაშრომი შესრულებული იყო შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით (გრანტი SRNSF/FR/358/5-109/14).

გაზის დინების მოდელირება განშტოებებისა და დახრის მქონე სატრანზიტო მილსადენში

თეიმურაზ დავითაშვილი
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი,
თბილისი, საქართველო, tedavitashvili@gmail.com

ბუნებრივი გაზის განაწილების ქსელი წარმოადგენს რთულ სისტემას ასობით და ათასობით კილომეტრის მქონე მილსადენებით, საკომპრესიო სადგურებით და სხვა მრავალი მექანიზმებითა და მოწყობილობებით ბუნებრივი გაზის ტრანსპორტირებისა და განაწილების სერვისისთვის. ბუნებრივი გაზის ტრანსპორტირებისა და განაწილების სისტემაში მომხმარებლისთვის სათანადო პირობების შექმნა ერთ-ერთ პრაქტიკულად მნიშვნელოვან და განსახორციელებლად საკმაოდ რთულ პრობლემას წარმოადგენს. ამ პრობლემის გადაწყვეტის გზაზე გაზის წნევისა და ხარჯის განაწილების განსაზღვრა მთელ მილსადენში ერთ ერთი მნიშვნელოვანი ნაბიჯია. გაზის წნევისა და ხარჯის განაწილების განსაზღვრა დახრისა და განშტოებების მქონე მილსადენში კიდევ უფრო რთულ, მაგრამ მეტად პრაქტიკულ ამოცანას წარმოადგენს. ამ სტატიის მიზანია განშტოებებისა და დახრის მქონე მილსადენში განვსაზღვროთ გაზის წნევისა და ხარჯის განაწილების სივრცულ დროითი მდგომარეობა გამარტივებული ერთ-განზომილებიანი კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების საფუძველზე, რომელიც აღწერს გაზის არასტაციონალურ დინებას განშტოებებისა და დახრის მქონე მილსადენში. მოცემულია ანალიზური ამონახსნი გამარტივებული ერთ-განზომილებიანი კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებისა, რომელიც აღწერს გაზის არასტაციონალურ დინებას განშტოებებისა და დახრის მქონე მილსადენში. ასევე წარმოდგენილია რიცხვითი თვლის ზოგიერთი შედეგები.

თხელკედლოვანი დრეკადი სტრუქტურებისათვის დაზუსტებულ და იერარქიულ თეორიათა დაფუძნებისა და მდგრადობის შესახებ

თამაზ ვაშაყმაძე,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი,
თბილისი, საქართველო, tamazvashakmadze@gmail.com

დრეკად გარსთა, ფირფიტათა და ძელოვან სისტემათა შესაბამისი სასრული (თ. ფონ კარმან–ე. რეისნერ რ. მინდლინის ტიპის) და იერარქიული (ი. ვეკუა, ი. ბაბუშკა) მათემატიკური მოდელების მაგალითზე განიხილება მათი დაფუძნებასა და მდგრადობასთან დაკავშირებული საკითხები. [1, 2] შრომებზე დაყრდნობით, ნაჩვენები იქნება, რომ აღნიშნული მოდელების აგების ვარიაციული მეთოდების დაფუძნებისათვის არსებითია აპრიორი დასაშვებ ფუნქციათა კლასის განსაზღვრა და საძიებელი ექსტრემალის არსებობა, რაც შესაბამისი პროცესის მდგრადობისათვის, მაგ., ბუნებრივი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, საკმარისი არ არის და მოითხოვს გარკვეული ტიპის (იხ. მაგ., [3, 4]) კორექციას.

ლიტერატურა

1. Young, L.: Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory, W.R. Sanders Company, 340 pp., Philadelphia-London-Toronto (1969).
2. Vashakmadze, T.: On the Origin of the Theory of Distributions or the Heritage of Andrea Razmadze, Bull. Georg. Natl. Acad. Sci., vol.11, N2, pp. 12-14(2017).
3. Rectorys, K.: Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering, Dr. Reidel Publ. Company, 592 pp., Prague (1980).
4. Vashakmadze, T.: The Theory of Anisotropic Elastic Plates, Springer-Sci. + Business Media, B.V., 256 pp (2010).

იმპლანტის ირგვლივ დრუბლისებრი ძვლის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის შესწავლა ოკლუზიური დატვირთვისას

ნათელა ზირაქაშვილი
ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი,
თბილისი, საქართველო, natzira@yahoo.com

მოხსენების მთავარი მიზანია იმპლანტიანი ყბის დრუბლისებრი ძვლის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელირება და შესწავლა. დრუბლისებრი ძვალი შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც მრავალფოროვანი სხეული, სადაც ღარები და ფოროვანი ბლოკები არიან ორგვარი ფოროვანი სისტემის ყველაზე გამოკვეთილი კომპონენტები [1]. დრუბლისებრი ძვალი შედგება მყარი და თხევადი ფაზისაგან. ძვლის მყარი ფაზისათვის წარმოდგენილია განტოლებები, რომლებიც აღწერენ წნევის გავლენას მყარ დეფორმაციაზე ყოველ კომპონენტში და თხევადი ფაზისთვის ჩაწერილია ცალკეული განტოლებები ყოველი კომპონენტისთვის, რომლებიც განსხვავდებიან ფოროვნებითა და გამტარობით [2]. შესწავლილია იმპლანტის მახლობლად ყბის დრუბლისებრი ძვლის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა ოკლუზიური დატვირთვის შემთხვევაში. ამ ამოცანის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის საკონტაქტო ამოცანა იმპლანტსა და ყბის ძვალს შორის. ამოცანის ამოსახსნელად გამოყენებულია სასაზღვრო ელემენტთა მეთოდები, რომლებიც დაფუძნებულია ფლამანის (სემფ) და ბუსინესკის (სემბ) ამოცანების ამონახსნებზე. განხილულია შემთხვევები, როდესაც იმპლანტის დიამეტრი ტოლია 0.4სმ, 0.6სმ, 0.8სმ და 1სმ. აგებულია ძვალში ძაბვების კონტურები (იზოწირები) და შედარებულია სემფ და სემბ-ით მიღებული შედეგები სხვადასხვა დიამეტრის მქონე იმპლანტებისათვის.

ლიტერატურა

1. Aifantis E.C. On the problem of diffusion in solids. Acta Mech., 37, 265-296, 1980
2. Mao Bai, Derex Elsworth, Jean-Claude Roegiers: Multiporosity \Multipermeability Approach to the Simulation of Naturally Fractured Reservoirs. Water Resources Research, 29 (6), 1621-1633, 1993

დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ნაწილობრივ უცნობსაზღვრიანი ერთი ამოცანის შესახებ

გიორგი კაპანაძე
ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი, თბილისი, საქართველო
ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი თბილისი, საქართველო, kapanadze.49@mail.ru

განხილულია დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ნაწილობრივ უცნობსაზღვრიანი ამოცანა (ანუ, რაც იგივეა თანაბრადმტკიცე კონტურის მოძებნის ამოცანა) მართკუთხა ფირფიტისათვის, რომლიდანაც თანაბრადმტკიცე კონტურით (საზღვრის უცნობი ნაწილი) ამოჭრილია გარკვეული ნაწილი. ვგულისხმობთ, რომ საზღვრის სწორხაზოვან მონაკვეთებზე მოქმედებენ მოცემული მთავარი ვექტორის მქონე ნორმალური მკუმშავი ძალვები, ხოლო საზღვრის უცნობი ნაწილი თავისუფალია გარეგანი დატვირთვებისაგან. უცნობი კონტურის თანაბრადსიმტკიცის პირობა გულისხმობს მასზე ტანგენციალური ნორმალური ძაბვის მუდმივობას.

ამოცანის ამოსახსნელად გამოყენებულია კომპლექსური ანალიზის მეთოდები და საძიებელი კომპლექსური პოტენციალები და თანაბრადმტკიცე კონტურის განტოლება აგებულია ეფექტურად (ანალიზური ფორმით).

მადლობა. წინამდებარე მოხსენება შესრულებული იყო შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის მხარდაჭერით (გრანტი SRNSF / FR / 358 / 5-109 / 14).

ზვავისებრი ნაკადების დინამიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირება

ტარიელ კვიციანი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,
თბილისი, საქართველო, tarielk@mail.ru

ზვავისებრი ნაკადების დინამიკური პროცესების შესწავლის მიზნით მოყვანილია ცნობები ზვავსაშიშროების პირობებთან დაკავშირებით. კერძოდ, ზვავწარმოქმნის დამოკიდულება ზედაპირის ქანობთან, რომლებიც ზოგად წარმოდგენას იძლევიან ზვავების წარმოშობისა და გავრცელების პროცესებზე და საკმაოდ მნიშვნელოვანნი არიან თეორიულ-რაოდენობრივი შეფასების შექმნისათვის.

თოვლის ზვავების ძირითად ფიზიკურ-მექანიკურ მოდელად აღებულია უწყვეტ დეფორმადი ტანის მოდელი, სადაც სრულად ვლინდება პლასტიკურობის და სიფხვიერის ხასიათი. თოვლის ზვავების დინამიკური პროცესების აღსაწერად გამოყენებულია კომპოზიციური გარემოს (მეწყერ-ჩამონაქცევების) განტოლებათა სისტემა, წარმოდგენილი ჰიდროდინამიკის განტოლებათა ფორმით და მისი ერთგანზომილებიანი ვარიანტი [1]. ეს სისტემები ითვალისწინებენ ფხვიერ და პლასტიკურ თვისებებს და ამის გარდა, პლასტიკურობას, რომელიც მახასიათებელია ბინგამისებრი სითხეებისათვის, დინამიკურ განტოლებებში დაძვრის ზღურბლური დაძაბულობის გათვალისწინების ხარჯზე. მარცვლოვანი ფხვიერი გარემოს პარამეტრების განულების დროს ეს სისტემა ავტომატურად გადადის გენკი-ილიუშინის განტოლებაში, რომელიც აღწერს ე.წ. პლასტიკურ-ბლანტ სითხეებს (ბოჩერ-ბინგამის სითხე), რაც მახასიათებელია „რბილი“ თოვლის ზვავებისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ მნიშვნელოვანი სინოტივე.

ამოსავალი ფიზიკურ-მექანიკური მოდელის განტოლებები შედგებიან: ფხვიერი გარემოს ზღვრული მდგომარეობის განტოლებისაგან შინაგანი ხახუნის კუთხით და შეჭიდულობის კოეფიციენტით (კულონ-ტრესკი-სენ-ვენანის პირობა), რომლითაც განისაზღვრება ურთიერთკავშირი მხები და ნორმალური ძაბვების კომპონენტებს შორის, აგრეთვე კავშირი ძაბვების ტენზორის კომპონენტებს შორის, შიგა ხახუნის კუთხით და სიჩქარული დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებს შორის, რომლებიც გვიჩვენებენ დაძვრის დეფორმაციის უდიდესი სიჩქარის მიმართულების თანხვედრას დაცურების წირების ოჯახის ერთერთ მიმართულებასთან (იშლინსკი-გენიევის პირობა), პლიუს პლასტიკურობის გათვალისწინება, რომელიც განპირობებულია თოვლის სინოტივით [1].

ზვავის სხეულის მოდელად აღებულია სასრული ზომების მქონე სხეული. გათვალისწინებულია მისი გეომეტრიული ზომები, მასათა ცენტრისა და ფრონტალური არეების გადაადგილების სიჩქარეებს შორის განსხვავება. მიღებული შედეგები ასრულებენ ისეთი დამხმარე ფაქტორების როლს, რომლის გარეშე შეუძლებელია ამონახსნების სწორი ანალიზი და ინტერპრეტაცია. ეს ეხება ისეთ პარამეტრებს, როგორებიცაა: ზვავის სხეულის სიმაღლე და სიგრძე; მისი გრძივი პროფილის კოორდინატა; ფრონტის სიჩქარე, როგორც მანძილისა და დროის ფუნქცია; წინააღმდეგობებზე ზემოქმედების ძალური პარამეტრები; ცივი ქარების მოქმედება თოვლის საფარზე და ა.შ. რაც არსებით გავლენას ახდენს მიღებული შედეგების უტყუარობის დადგენაში [2,3].

ლიტერატურა

1. კვიციანი ტ. ფერდოს მდგრადობა და ზვავისებრი ნაკადები. გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“. თბილისი, 2010. – 140 გვ.
2. Лосов К.С.Некоторые воросы движения лавин и лругих аналогичных явлений. Труды всесоюзного совещания по лавинам.Л.: Гидрометеоиздат, 1978, с 64-69.

3. Москалев Ю.Р. Возникновение и движение лавин Л.: Гидрометеоиздат, 1976 272 с.

ზედაპირის ჩადგმის შესახებ რიმანის 3-განზომილებიან მრავალსახეობაში

თენგიზ მეუნარგია
ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი, თბილისი, საქართველო,
tengizmeunargia37@gmail.com

გაუსის არანულოვანი სიმრუდის ზედაპირები წარმოადგენენ რიმანის 2-განზომილებიან მრავალსახეობებს, რომლებიც ჩადგმულია ევკლიდის 3-განზომილებიან სივრცეში. ამის გამო, ამ მრავალსახეობების თვისებებზე შესაძლებელია შეიქმნას საკმარისად ნათელი წარმოდგენები. შემდეგ, ნაჩვენებია, რომ ნებისმიერი რეგულარული ზედაპირი შეიძლება ჩაიდგას რიმანის 3-განზომილებიან მრავალსახეობაში.

მადლობა. წინამდებარე მოხსენება შესრულებული იყო შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით (გრანტი SRNSF/FR/358/5-109/14).

წამახვილებული ფილების ღუნვის დეფორმაციების კვლევა სასრულ ელემენტთა მეთოდით და რედუქციული მეთოდის დამუშავება ანალიზური ფუნქციებით აპროქსიმაციის გამოყენებით

გიორგი ნოზაძე
სსიპ გ. წულუკიძის სამთო ინსტიტუტი
g_nozadze@yahoo.com

განხილულია სხვადასხვა სიმრუდის ზედაპირებით შემოსაზღვრული პრიზმული წამახვილებული ფილების ღუნვის დეფორმაციის ამოცანა, რომელთაც გააჩნიათ სიმეტრიის სიბრტყე (იხ., მაგ. [1]). როგორც ცნობილია, ასეთ პირობებში პრიზმული ფილების სამგანზომილებიანი დრეკადობის ამოცანა შესაძლებელია დავიყვანოთ ორ განზომილებიან ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობის დრეკადობის ამოცანაზე.

დასმულია წამახვილებული ფილის წვეროს, როგორც განსაკუთრებული არის დატვირთვის ამოცანა. სიმარტივისათვის განხილულია სუფთა ღუნვის ამოცანა, როდესაც განსაკუთრებულ არეში (წვეროს მონაკვეთზე) მოდებულია განაწილებული დატვირთვა სიმეტრიის სიბრტყის მართობულად. მიღებულია ამოცანის დისკრეტული ამონახსნი სასრულ ელემენტთა მეთოდის გამოყენებით.

მიღებული დისკრეტული შედეგების მიხედვით განხორციელდა სხეულის ფორმის ფუნქციის სათანადო წერტილების მიხედვით გადაადგილების უწყვეტი ფუნქციის აგება ნიშანცვლადი ხარისხოვანი მწკრივებით აპროქსიმაციის გამოყენებით. ნაჩვენებია, რომ სასრული რაოდენობის წევრთა მქონე ნიშანცვლადი ხარისხოვანი მწკრივებით აპროქსიმაცია იძლევა კარგ მიახლოვებას, რათა დრეკადობის ამოცანა გადაიჭრას გადაადგილებებში განსაკუთრებულ არეთა დატვირთვის დროს.

შესრულებული კვლევითი სამუშაოს საფუძველზე ნაჩვენებია, რომ შესაძლებელია დამუშავდეს რედუქციული ანალიზური მეთოდები, რომელთა გამოყენებაც გააუმჯობესებს რთული გეომერტრიული ფორმის მქონე

სხეულების დეფორმაციის კვლევას პრაქტიკაში მისაღები სიზუსტის ფარგლებში.

ლიტერატურა

1. Georg Jaiani – “Cusped Shell-like Structures”, Springer Briefs in Applied Science and Technology, Springer-Heidelberg-Dordrecht-London-New York, 2011, 84 p.

კირხოფის ტიპის ზოგიერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმებისა და რიცხვითი გათვლების შესახებ

არჩილ პაპუკაშვილი*, გიორგი პაპუკაშვილი**,
ჯემალ ფერაძე***
*ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი.
**ვ. კომაროვის თბილისის № 199 საჯარო სკოლა,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
***ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,
თბილისი, საქართველო,
archil.papukashvili@tsu.ge, gagapapukashvili@gmail.com,
j_peradze@yahoo.com

განხილულია მიახლოებითი ამოხსნის საკითხები შემდეგი ორი ამოცანისთვის:

1. არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანა კირხოფის ტიპის სტატიკური ძელისთვის (იხ. მაგალითად [1], [2]). გრინის ფუნქციების გამოყენებით ამოცანა დაიყვანება არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის ამოსახსნელადაც ვიყენებთ პიკარის ტიპის იტერაციულ მეთოდს.

2. არაწრფივი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ჯ. ბოლის დინამიური ძელისთვის (იხ. მაგალითად [3], [4]). ამოცანის ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ ალგორითმით, რომლის შემადგენელი ნაწილებია გალიორკინის მეთოდი, სიმეტრიული სხვაობიანი სქემა და იაკობის იტერაციული მეთოდი.

ორივე ამოცანის შემთხვევაში გამოწერილია მიახლოებითი ამოხსნის ახალი სათვლელი ალგორითმები და ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები. შედეგები წარმოდგენილია ცხრილებისა და გრაფიკების სახით.

ლიტერატურა

1. J.Peradze, A numerical algorithm for a Kirchhoff – type nonlinear static beam. J. Appl. Math. 2009, Art.ID 818269, 12pp.
2. T.F.Ma, Positive solutions for a nonlocal fourth order equation of Kirchhoff type. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007, 694-703.
3. J. M. Ball, Stability Theory for an Extensible Beam, J. Diff. Eq., 14 (1973), 399-418.
4. G.Papukashvili, J.Peradze, Z.Tsiklauri, On a stage of a numerical algorithm for Timoshenko type nonlinear equation, Proc. A.Razmadze Math.Inst., Tbilisi, 158, (2012), 67-77.

რთული ბაგირღეროვანი სტრუქტურების და სხვა მსგავსი სამშენებლო კონსტრუქციების მოდელირება და გაანგარიშება დისკრეტული წარმოდგენისა და სპეციალური ალგორითმის საფუძველზე

დავით პატარაია
გრიგოლ წულუკიძის სახელობის სამთო ინსტიტუტი,
თბილისი, საქართველო, david.pataraia@gmail.com

კვლევის საგანს წარმოადგენს რთული ბაგირღეროვანი სტრუქტურები, როგორიცაა, მაგალითად, საბაგირო გზები, ვანტური ხიდები, კოსმოსური საბაგირო სისტემები და ანტენები, სტადიონების და სხვა დიდი ზომის მქონე ობიექტების დამცავი გადახურვები, ზვავსაწინააღმდეგო

ნაგებობები და შემაკავებელი ბადეები. ზოგადად კი მოცემული პროექტის კვლევის საგანია მსგავსი რთული კონფიგურაციის მყარი დეფორმირებადი ტანების მოდელირება და გაანგარიშება.

სტანდარტული მეთოდებით და პროგრამული უზრუნველყოფით ასეთი ობიექტების მოდელირება და გაანგარიშება ხშირად მნიშვნელოვან პრობლემებთანაა დაკავშირებული ჰისტერეზისის, ფოლხვის, ხახუნის და სხვა არსებითი არაწრფივი დამოკიდებულებების მიზეზით. გარდა ამისა, დიდი განზომილების ობიექტების გაანგარიშება განსაკუთრებით კი, როცა ამავე დროს შედეგების დიდი სიზუსტეა საჭირო, ასევე გაზრდილ და ხშირად ძნელად შესასრულებელ მოთხოვნებს უყენებს გამოთვლით მეთოდებსა და კომპიუტერულ ტექნიკას.

კვლევის აქტუალურობას აგრეთვე განაპირობებს სათანადო უნივერსალური მეთოდებისა და სათვლელი პროგრამული პაკეტების კონკრეტული ამოცანის გადასაჭრელად მისადაგებისა და გამოყენების სირთულე, განსაკუთრებით კი, როცა გამოსაკვლევი ობიექტი არაწრფივი მახასიათებლებითაა და თანაც დიდი ზომის.

კვლევის სიახლე მდგომარეობს რთული ბაგირღეროვანი სტრუქტურების სტატიკური და დინამიკური გაანგარიშების ჩვენს მიერ შემუშავებულ მეთოდში, რომელიც ეფუძნება მყარი დეფორმირებადი ტანის დისკრეტულ წარმოდგენასა და სპეციალურ სათვლელ ალგორითმს [1], [2], [3].

შემოთავაზებული მიდგომის საფუძველზე ჩვენს მიერ დამუშავებულია რთული კონფიგურაციისა და არაწრფივი მახასიათებლების მქონე სხეულებისა და სამშენებლო კონსტრუქციების სტატიკური და დინამიკური გაანგარიშების ალგორითმი და სათანადო სათვლელი პროგრამა, რომელთა ეფექტიანობა და საიმედოობა დადასტურდა რეალური ობიექტების მოდელირებით და კონკრეტული გაანგარიშებებით.

მადლობა. წინამდებარე მოხსენების მნიშვნელოვანი ნაწილი შესრულებული იყო რუსთაველის ფონდის დაფინანსებითა და თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის კოლექტივთან და მისი ხელმძღვანელთან პროფესორ გ. ჯაიანთან თანამშრომლობით.

ლიტერატურა

1. David Pataraia. The calculation of rope-rod structures of ropeways on the basis of the new approach.WORLD CONGRESS of O.I.T.A.F., RIO DE JANEIRO, BRAZIL, October, 2011, 24 – 27, PAPERS OF THE CONGRESS; http://www.oitaf.org/Kongress%202011/Referate/Pataraia.pdf
2. D. Pataraia. Ein Beitrag zur diskreten Darstellung des Seiles. Wissenschaftliche Arbeiten des Instituts fuer Eisenbahnwesen, Verkehrswirtschaft und Seilbahnen, Technische Univesitaet Wien, 1981.
3. David Pataraia. Dynamische Analyse und Simulation von Seil-Stab-Strukturen von Seilbahnen auf Basis diskreter Darstellung und sukzessiven Approximationsalgorithmus WORLD CONGRESS of O.I.T.A.F., Bolzano, Italy, 6-9 Juni, 2017 PAPERS OF THE CONGRESS; http://oitaf2017.com/wp-content/uploads/2017/06/oitaf-kongr-bolcano-040617- vort-germ- JN-050617- 2.pdf

მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანები ბინარულ ნარევთა ბლანტი თერმოდრეკადობის თეორიაში

მაია სვანაძე
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ი. ჭავჭავაძის გამზ. 3, თბილისი 0179, საქართველო,
maia.svanadze@gmail.com

მოხსენებაში განხილულია ბინარულ ნარევთა ბლანტი თერმოდრეკადობის თეორია, როცა ნარევის ერთი კომპონენტი იზოტროპული დრეკადი სხეულია, ხოლო მეორე - კელვინ-ფოიგტის მასალა. გამოკვლეულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები

და განზოგადებულია ბლანტი თერმოდრეკადობის კლასიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი შედეგი. ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით აგებულია მდგრადი რხევის განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნი. მიღებულია გრინის ფორმულები და რეგულარული ვექტორისა და კლასიკური ამონახსნების ინტეგრალური წარმოდგენები. დამტკიცებულია მდგრადი რხევის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობა. დადგენილია პოტენციალებისა და სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორების ძირითადი თვისებები. ბოლოს, პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია ზემოთ აღნიშნული ამოცანების ამონახსნების არსებობის თეორემები.

მადლობა. ეს კვლევა შესრულებულია შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით (გრანტი # YS15_2.1.1_100).

იაკობის იტერაცია ძელის დინამიური ამოცანისთვის

ჯემალ ფერაძე
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,
თბილისი, საქართველო, e-mail: j_peradze@yahoo.com

განხილულია საწყის სასაზღვრო ამოცანა დიფერენციალური განტოლებისათვის [1, 2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)-h\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x,t)-\left(\lambda+\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)\right)^2 d\xi\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0,$$

რომელიც აღწერს ძელის დინამიურ მდგომარეობას. სივრცული და დროის ცვლადების მიმართ ამონახსნის მიახლოების შედეგად მიღებულია დისკრეტული განტო-

ლებების არაწრფივი სისტემა, რომლის ამოსახსნელად გამოყენებულია იტერაცია. დადგენილია იტერაციის კრებადობის პირობები და შეფასებულია მისი ცდომილება.

ლიტერატურა

1. Henriques de Brito E.: A nonlinear hyperbolic equation, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 3(3), 505-520, 1980.
2. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W.: Vibration problems on engineering. John Wiley & Sons, Inc., 1974.

ტიმოშენკოს ძელისათვის არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შესახებ

ჯემალ ფერაძე[1,2] , ზვიად ყალიჩავა[1]

[1]ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო

[2] საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო

j_peradze@yahoo.com; zviadi.kalichava@gmail.com

განხილულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანა არაწრფივი დინამიური ძელისათვის [1, 2]. მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად გამოყენებულია ვარიაციული მეთოდი და სიმეტრიული არაცხადი სხვაობიანი სქემა. დისკრეტიზაციის შედეგად მიღებულ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად გამოყენებულია იტერაციული მეთოდი და შერმან-მორისონის ფორმულა. შესწავლილია იტერაციული მეთოდის სიზუსტე.

ლიტერატურა

1. Peradze J., On the accuracy of the Galerkin method for a nonlinear dynamic beam equation. Math. Meth. *Appl. Sci.* **34** (2011), no. 14, 1725-1732.
2. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W., *Vibration problems on engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 1974.

წიბოებიანი გარსების ანგარიში სასრულ ელემენტთა მეთოდით

გელა ყიფიანი, სეით ბლიაძე

საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი, თბილისი, ქეთევან. წამებულის ქ. №,16, 0144, საქართველო. gelakip@gmail.com, khuta60@gmail.com

განხილულია სიხისტის წიბოების მქონე ფირფიტებისა და გარსების თეორიის განვითარების ძირითადი ეტაპები. აღნიშნულია, რომ წიბოების მქონე გარსების თეორია წარმოადგენს ერთ-ერთ ყველაზე დაუსრულებელ და სადავო თეორიას გარსთა ზოგად თეორიაში. მოყვანილია წიბოების მქონე გარსების ანგარიში სასრულ ელემენტთა მეთოდის გამოყენებით. პირველ შემთხვევაში წიბოები წარმოდგენილია როგორც ძელის სასრული ელემენტი (სე), ხოლო გარსი მოდელირებულია როგორც სე ფირფიტა. მეორე შემთხვევაში გარსიც და წიბოებიც მოდელირებულია როგორც სე ფირფიტა. მესამე შემთხვევაში გარსიც და წიბოებიც მოდელირებულია როგორც სამგანზომილებიანი სე. მეოთხე შემთხვევაში გარსის წიბოები მოდელირებულია როგორც სე ძელი, ხოლო გარსი მოდელირებულია როგორც სამგანზომილებიანი სე. ექსპერიმენტული კვლევა ჩატარდა BS EN ISO 9001 და EN 9100 საერთაშორისო სერტიფიკატების მქონე საწარმოოს სს “თბილავიამშენი”-ს, სიმტკიცის ლაბორატორიაში. მოყვანილია ექსპერიმენტული და თეორიული კვლევების შედეგების შედარებითი ანალიზი. (ცთომილება $\approx 5\%$).

ლიტერატურა

1. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, inc. 1973.

ელექტროდრეკადობის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა დრეკადი ჩართვისა და ბზარის მქონე უბან-უბან ერთგვაროვანი სიბრტყისათვის

ნუგზარ შავლაყაძე
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი, თბილისი, საქართველო, nusha@rmi.ge

განიხილება პიეზო-ელექტრული მასალის უბან-უბან ერთგვაროვანი ფირფიტა, რომელიც შესუსტებულია უსასრულო ბზარით და გამაგრებულია უსასრულო ჩართვით (ძელით), როგორც ნორმალური $p_0(x)$ ინტენსივობის მქონე ძალით დატვირთული ელექტროდი. ბზარის საზღვარზე მოცემულია ნორმალური $q_0(x)$ ძალები და ელექტრული პოტენციალი.

ამოცანა მდგომარეობს ბზარის გახსნის $f(x)$ ფუნქციისა და ნორმალური საკონტაქტო ძაბვის $p(x)$ ნახტომის განსაზღვრაში, აგრეთვე მათი ყოფაქცევის დადგენაში სინგულარული წერტილების მიდამოში.

ჩართვის ელემენტის წონასწორობის განტოლების ძალით გვაქვს

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2v^{(1)}(x)}{dx^2} = p_0(\mathrm{x}) - p(x), \quad x > 0 \tag{1}$$

და მთელი ჩართვის წონასწორობის განტოლებებს კი აქვთ სახე

$$\int_0^\infty [\mathrm{p}(t) - p_0(t)]dt = 0, \quad \int_0^\infty \mathrm{t}[\mathrm{p}(t) - p_0(t)]dt = 0, \tag{2}$$

სადაც $v^{(1)}(x)$ არის ჩართვის წერტილების ვერტიკალური გადაადგილება, $D(x)$ არის ჩართვის მასალის სიხისტე ღუნვაზე.

ბზარის საზღვარზე გვაქვს

$$\sigma_y^{(2)+}(x) + \sigma_y^{(2)-}(x) = 2q_0(x), \quad x < 0 \tag{3}$$

ორი მასალის გამყოფ საზღვარზე ძალაშია შემდეგი პირობები

$$\begin{aligned} &\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)} \\ &E_y^{(1)} = E_y^{(2)}, \quad D_x^{(1)} = D_x^{(2)} \end{aligned} \tag{4}$$

სადაც $\sigma_x^{(j)}(x)$, $\tau_{xy}^{(j)}(x)$ - ძაბვის კომპონენტებია, $u^{(j)}(x)$, $v^{(j)}(x)$, -გადაადგილების კომპონენტები, $E_y^{(j)}(x)$, $D_x^{(j)}(x)$ $(j = 1,2)$ ელექტრული ძაბვის და ინდუქციის ვექტორის კომპონენტებია.

(1-4) პირობების ძალით, შემოვიღებთ რა აღნიშვნას $\psi(t) = f(-t)$, მივიღებთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას უძრავი სინგულარობით [1,2]

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty \left[\frac{\lambda_1}{t-x} + R_1(t,x)\right]p(t)dt + \int_0^\infty R_2(-t,x)\psi(t)dt\right) = \frac{1}{D(x)}\int_0^x dt\int_0^t [p_0(\tau) - p(\tau)]d\tau, \qquad x > 0 \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{\lambda_3}{t-x} + R_4(-t,-x)\right]\psi(t)dt + \int_0^\infty R_3(t,-x)\,\mathrm{p}(t)dt = \mathrm{q}_0(-x), \quad x > 0 \tag{6}$$

(5-6) სისტემის ამოსახსნელად, როდესაც $D(x) = D = const$, $x > 0$, განზოგადოებული ფურიეს გარდაქმნის გამოყენებით [3]

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(e^\varsigma)e^{i\varsigma s}d\varsigma,$$

ფუნქციისათვის, სადაც

$$\varphi(x) = \int_0^x dt\int_0^t [p_0(\tau) - p(\tau)]d\tau,$$

მიიღება კარლემანის ტიპის სასაზღვრო ამოცანა ზოლისათვის

$$G(s)F(s+3i) - F(s) = P(s), \qquad -\infty < s < \infty \tag{7}$$

მაშასადამე, განიხილება შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ფუნქცია $F(z)$, რომელიც ჰოლომორფულია $0 < \operatorname{Im} z < 3$ ზოლში, ქრობადია უსასრულობაში, უწყვეტად გაგრძელებადია ზოლის საზღვარზე და აკმაყოფილებს (7) პირობას.

ფაქტორიზაციის მეთოდის გამოყენებით ამ ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება ცხადი სახით [4].

შებრუნებული გარდაქმნით ნორმალური საკონტაქტო ძაბვისათვის მიიღება შემდეგი შეფასება

$$p_0(x) - p(x) = \varphi''(x) = O(x^{-1/2}), \qquad x \to 0+$$

ხოლო ბზარის გახსნის ფუნქციას აქვს შემდეგი ყოფაქცევა

$$f(x) = O(x^{-1/2+\omega}), \qquad x \to 0-, \qquad 0 < \omega < 1/2.$$

ლიტერატურა

1. Parton V. Z., Kudriavzev B. A. Electromagneto-elasticity of piezo-electric and electro-conductive bodies. Moscow, Nauka, 1988. p. 470 .
2. Muskhelishvili N. Singular integral equations. Moscow, Nauka, 1966. p. 591.
3. Gakhov F.D., Cherskii Yu.I. Convolution Type Equation. Moscow, Nauka, 1978. p.296.
4. Bantsuri R. The boundary problems of the theory of analytic functions.// Soobsh. Acad. Nauk. GSSR. 1974. 73(3), p. 549-552.

ორ ფოროვან ცილინდრს შორის არაიზოთერმული დინებების მდგრადობის შესახებ

ლუიზა შაფაქიძე

ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი, თბილისი, საქართველო, luiza@rmi.ge

მოხსენებაში წარმოდგენილია ორ ფოროვან უძრავ ჰორიზონტალურ ცილინდრს შორის ამ ცილინდრების გასწვრივ დატუმბვით შეღწეული სითხის დინებისა და ბრუნვად ფოროვან ვერტიკალურ ცილინდრებს შორის დინებების არამდგრადობისა და ქაოსურ მოძრაობაში გადასვლის ამოცანები. იგულისხმება რომ დინებებზე მოქმედებენ რადიალური დინებები და რადიანული ტემპე-რატურული გრადიენტი.

ლამინარული სითხის სტაციონარული დინება უსასრულო სიგრძის წრიული ფორმის მილში

ვარდენ ცუცქირიძე*, ლევან ჯიქიძე,**,
ეკა ელერდაშვილი*

*მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0175, თბილისი, მ. კოსტავა 77,

**საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0175, თბილისი, მ. კოსტავა 77,

btsutskiridze@yahoo.com, levanjikidze@yahoo.com,
Ek.elerdashvili@yahoo.com

შესწავლილია ელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვა-დი სითხის სტაციონარული დინება უსასრულო სიგრძის მქონე მილში, როდესაც მოქმედებს გარეგანი მაგნიტური ველი. მოძრაობა გამოწვეულია წნევის მუდმივი დაცემით. მიღებულია დასმული ამოცანის ზუსტი ამონახსნები ზო-გადი სახით [1-5].

ლიტერატურა

1. Loitsiansky L.G. Mechanic of a fluid and gas. Moscow: Sciences, 1987. -840 p. (in Russian).
2. Vatazin A. B., Lubimov G. A., Regirer C. A. Magnetohydrodynamic Flow in Channels. Moscow: Nauka, 1970, -672 p. (In Russian).
3. V. Tsutskiridze, L. Jikidze. The conducting liquid flow between porous wells with heat transfer. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute Vol. 167, 2015, pp. 73-89, (Engl.).
4. J. Sharikadze, V. Tsutskiridze, L. Jikidze. The flow conducting liquid in magnetohydrodynamics tubes with heat transfer//International Scientific Journal IFToMM “Problems of Mechanics”, Tbilisi, 2011, № 3(44), pp. 63--70.
5. V. Tsutskiridze and L. Jikidze, The nonstationary flow of a conducting fluid a plane pipe in the presence of a transverse magnetic field. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute Vol. 170, Issue 2, September 2016, pp.280-286, (Engl).

ოპტიკური სოლიტონების არადრეკადი ურთიერთქმედების მოდელირება

ოლეგ ხარშილაძე*,****, ვასილ ბელაშოვი**,
ჯემალ როგავა***, ხათუნა ჩარგაზია***,*
*ფიზიკის დეპარტამენტი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო,
**ყაზანის ფედერალური უნივერსიტეტი, ყაზანი რუსეთი,
***ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო,
****მ. ნოდიას სახელობის გეოფიზიკის ინსტიტუტი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო,
oleg.kharshiladze@gmail.com

ინფორმაციის ოპტიკური გადაცემისთვის აქტუალურია ოპტიკურ ბოჭკოში ლაზერული სოლიტონების გავრცელების და ურთიერთქმედების შესწავლა. ეს ურთიერთქმედება მნიშვნელოვნად ცვლის სინათლის ველის მახასიათებლებს და ამახინჯებს გადაცემულ ინფორმაციას. სოლიტონების მართვის თვალსაზრისით აუცილებელია ბოჭკოს დეფექტების, დისპერსიული და არაწრფივობის არაერთგვაროვნებების, გარემოს პარამეტრების არასტაციონალურობის გავლენის შესწავლა სოლიტონების გავრცელებაზე. ამოცანა დაიყვანება სინათლის ველის ამპლიტუდისთვის შრედინგერის არაწრფივ განტოლებაზე სივრცულ კოორდინატზე და დროზე დამოკიდებული კოეფიციენტებით.

ჩატარებული რიცხვითი მოდელირებისათვის გამოყენებული იყო ფიზიკური წევრების მიხედვით განტოლების გახლეჩის ფურიეს მეთოდი, რომელშიც გათვალისწინებულია კოეფიციენტების არაერთგვაროვნება. განტოლება გაყოფილია ორ წრფივ და არაწრფივ ნაწილად და ცალცალკეა განხილული დისპერსიული და არაწრფივი ეფექტები და შესაბამისი ოპერატორები ჩათვლილია კომუტატურებად. სოლიტონების არასტაციონალურ გარემოში გავრცელების შესასწავლად გამოყენებული სასრულ სხვაობიანი მეთოდი არაცხადი სქემით.

რიცხვითი ექსპერიმენტებით ნაჩვენებია, რომ გარემოს არაერთგვაროვნება ცვლის სოლიტონების და სხვა სინათლის იმპულსების ამპლიტუდებს, მათი გავრცელების სიჩქარეებს, მათ რაოდენობას, რაც განპირობებულია არაერთგვაროვან ბოჭკოში მათი არადრეკადი ურთიერთქმედებით. გარემოს არასტაციონალობა ცვლის იმპულსის ფორმას და მის სპექტრალურ თვისებებზე ახდენ გავლენას. გარემოს პარამეტრების მოდულაციის ცვლილებით შესაძლებელია სოლიტონების მიზიდვა-განზიდვის არადრეკადი ურთიერთქმედების ხასიათის ცვლილება. მოდელირებით ნაჩვენებია ოპტიკური სოლიტონების გახლეჩის და შეერთების ეფექტები.

ლიტერატურა

1. Agrawal, G.P. Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, – 2013.
2. Belashov V.Yu., Belashova E.S. Solitons: theory, simulation, applications. Kazan, 2016.
3. Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersiv Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag GmbH&Co, 2005.

ფრიქციული ავტორხევების დინამიკური ანალიზი

ოლეგ ხარშილაძე*,***, ხათუნა ჩარგაზია**,***, ნოდარ ვარამაშვილი***, დიმიტრი ამილახვარი*, ლევან დვალი*
*ფიზიკის დეპარტამენტი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო,
**ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო,
*** მ. ნოდიას სახელობის გეოფიზიკის ინსტიტუტი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო,
khatuna.chargazia@gmail.com

მიწისძვრა ძირითადად ხასიათდება ფრიქციული დინამიკით, რომელიც იწვევს სტიკ–სლიპ (შეჭიდება–გასრიალება) პროცესებს დედამიწის ქერქში არსებული რღვევების გასწვრივ. მიწისძვრის რეკურენტული სეისმური ციკლი ხასიათდება გრძელპერიოდიანი კვაზი სტატიკური ევოლუციით (ტექტონიკური პროცესები), რომელ-საც ერთვის უეცარი გასრიალების ეფექტი თანმხლები დრეკადი ტალღის გამოსხივებით: მიწისძვრით (სეისმური პროცესები). ნაჩვენებია, რომ ფრიქციული მექანიზმი განაპირობებს არაწრფივ რელაქსაციურ რხევებს.

წარმოდგენილ მოხსენებაში განხილულია არაწრფივი ბურიჯ-კნოპოვის მოდელი ორი და სამი ბლოკის შემთხვევისათვის. ჩატარებულ ექსპერიმენტული კვლევებში გამოვლენილ იქნა არამდგრადობების ტრიგერირების მექანიზმი გასრიალების მოვლენების თანმხლები აკუსტიკური ემისიის ჩანაწერებში. ჩატარებულია ექსპერიმენტული კვლევის შედეგების ანალიზი. შესწავლილია მიღებული სიგნალების სპექტრალური თვისებები, რეკურენტული თვისობრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლები, ვეივლეტ დიაგრამები. ნაჩვენებია, რომ სტიკ-სლიპ მოვლენას სისტემაში ადგილი აქვს მხოლოდ კრიტიკული სიჩქარეების ვიწრო არეში. გარე ზემოქმედებას შეუძლია შეცვალოს სტიკ-სლიპის დინამიკა.

ლიტერატურა

1. N. Varamashvili, T. Chelidze, M. Devidze, Z. Chelidze, V. Chikhladze, A. Surmava, Kh. Chargazia, D. Tefnadze. Mass-movement and seismic processes study using Burridge-Knopoff laboratory and mathematical models. Journal of Georgian Geophysical Society, Issue (A), Physics of Solid Earth, 2015, pp.19-25.
2. Dieterich, J.H. (1979), Modeling of rock friction 1. Experimental results and constitutive equations. Journal of Geophysical Research, 84, B5, 2161-2168.
3. Burridge R. and Knopoff L. 1967. Model and theoretical seismicity. Bulletin of the Seismological Society of America, 57(3): 341-371.
4. Ruina A. 1983. Slip instability and state variable friction laws. Journal of Geophysical Research, 88, 10359-10370.
5. Chelidze T., N. Varamashvili, M. Devidze, Z. Chelidze, V. Chikhladze and T. Matcharashvili (2002), Laboratory study of electromagnetic initiation of slip. Annals of Geophysics, 45, 587-599.

ზოგიერთი სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანა დრეკადი ბინარული ნარევისთვის ორგვარი ფოროვნებით

რომან ჯანჯღავა
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი, თბილისი, საქართველო,
roman.janjgava@gmail.com

მოხსენება ეძღვნება ორგვარი ფოროვნების მქონე დრეკადი სხეულების წონასწორობის წრფივი განტოლებათა სისტემის განხილვას, როცა სხეულის მყარი ჩონჩხი წარმოადგენს ორი იზოტროპული მასალის ნარევს. ამ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი წარმოდგენილია ჰარმონიული ფუნქციებისა და მეტაჰარმონიული ფუნქციის საშუალებით. აგებული ზოგადი ამონახსნის საფუძველზე, ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენებით, ანალიზურად ამოხსნილია სასაზღვრო ამოცანათა კლასი მართკუთხა პარალელეპიპედისათვის.

მადლობა. წინამდებარე მოხსენება შესრულებული იყო შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით (გრანტი SRNSF/FR/358/5-109/14).

ლიტერატურა

1. Natroshvili D. G., Jagmaidze A. Ya., Svanadze M. Zh.: Some problems of the linear theory of elastic mixtures, TSU press, 1986 (in Russian).
2. Khomasuridze N., Janjgava R. Solution of some boundary value thermoelasticity problems for a rectangular parallelepiped taking into account microthermal effects, Meccacica, vol. 51, 2016, 211-221.

CONTENTS

ს ა რ ჩ ე ვ ი

English Editor: Ts. Gabeskiria

Technical editorial board: M. Tevdoradze
M. Sharikadze

ინგლისურის რედაქტორი: ც. გაბესკირია

ტექნიკური სარედაქციო კოლეგია: მ. თევდორაძე
მ. შარიქაძე