სტოქასტურად არაგლუვი ზოგიერთი ფუნქციონალის პირობითი საშუალოს სიგლუვის შესახებ

ომარ ფურთუხია
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,მათემატიკის დეპარტამენტი; ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი, თბილისი, საქართველო,
omar.purtukhia@tsu.ge, o.purtukhia@gmail.com

ცნობილია, რომ თუ შემთხვევითი სიდიდე სტოქასტურად (მალივენის აზრით) წარმოებადია, მაშინ მისი პირობითი მათემატიკური ლოდინი აგრეთვე სტოქასტურად წარმოებადია ([1]). მეორე მხრივ, ([2]) შესაძლებელია, რომ შემთხვევითი სიდიდე არ იყოს სტოქასტურად გლუვი, მაგრამ მისი პირობითი მათემატიკური ლოდინი უკვე იყოს გლუვი. თუ ფუნქციონალი სტოქასტურად გლუვია, მაშინ კლარკ-ოკონეს ცნობილი ფორმულა ამტკიცებს, რომ ასეთი ფუნქციონალის კლარკის სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის ინტეგრანდი წარმოადგენს მისი მალივენის წარმოებულის პირობით მათემატიკურ ლოდინს. მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნული ფორმულა გვაძლევს ინტეგრანდის კონსტრუქციას, მისი პრაქტიკული გამოყენება დაკავშირებულია გარკვეულ სიძნელეებთან (როგორც სტოქასტური წარმოებულის აღების, ისე პირობითი მათემატიკური ლოდინის გამოთვლის თვალსზრისით). ჩვენ [2] აღნიშნული შედეგი განვაზოგადეთ იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქციონალი არ არის სტოქასტურად გლუვი, მაგრამ მისი ფილტრი სტოქასტურად წარმოებადია და მოვიყვანეთ შესაბამისი ინტეგრანდის მოძებნის მეთოდი. შესაბამისად, ბუნებრივად იბადება სურვილი დავახასიათოთ ასეთი ფუნქციონალების მაქსიმალურად ფართო კლასი. ქვემოთ ჩვენ შევეცდებით გადავდგათ პირველი ნაბიჯი ამ მიმართულებით.

როგორც ცნობილია ([1]), ხდომილების ინდიკატორი სტოქასტურად წარმოებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ხდომილების ალბათობა ტოლია ნულის ან ერთის. ამიტომ გასაგებია, რომ $\{w_T > K\}$ ხდომილების ინდიკატორს არ გააჩნია მალივენის წარმოებული. შესაბამისად, ასეთი იქნება $F = f(w_T)I_{\{w_T>K\}}$ ტიპის ფუნქციონალი მაშინაც კი როცა $f = f(x)$ კლასიკური აზრით გლუვი ფუნქციაა.

თეორემა. $F = w_T^n I_{\{w_T>K\}}$ ფუნქციონალის პირობითი მათემატიკური ლოდინი სტოქასტურად გლუვია და ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$D_s\{E[w_T^n I_{\{w_T>K\}} \mid \Im_t^w]\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(T-t)^{3/2}}\int_K^\infty y^n (w_t - y)\exp\{-\frac{(w_t-y)^2}{2(T-t)}\}dy \cdot I_{[0,t]}(s)\,.$$

ამასთანავე,

$$E[D_s\{E[w_T^n I_{\{w_T>K\}} \mid \Im_t^w]\} \mid \Im_s^w] = -\frac{w_s}{(t-s)\sqrt{2\pi(T-s)}}\int_K^\infty y^n \exp\{-\frac{(y-w_s)^2}{2(T-s)}\}dy \cdot I_{[0,t]}(s) +$$

$$+\frac{1}{(T-s)^{3/2}\sqrt{2\pi}}\int_K^\infty y^{n+1} \exp\{-\frac{(y-w_s)^2}{2(T-s)}\}dy \cdot I_{[0,t]}(s) +$$

$$+\frac{w_s(T-t)}{(t-s)(T-s)^{3/2}\sqrt{2\pi}}\int_K^{\infty} y^n \exp\{-\frac{(y-w_s)^2}{2(T-s)}\}dy \cdot I_{[0,t]}(s) .$$

Acknowledgement. This work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation Grant No FR/308/5-104/12.

ლიტერატურა

1. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics.Springer-Verlag, 2006.
2. Глонти О., Пуртухия О. Об одном интегральном представлении броуновского функционала. Теория вероятностей и ее применения, Том 61, выпуск 1, 2016.