ახალი საკმარისი პირობა სტოქასტური ექსპონენტის თანაბრად ინტეგრებადობისათვის

ბესიკ ჩიქვინიძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ვ. ჭავჭანიძის სახელობის კიბერნეტიკის ინსტიტუტი,beso.chiqvinidze@gmail.com

მოცემული გვაქვს ძირითადი ალბათური სივრცე $(\Omega,\mathcal{F},P)$ უწყვეტი $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ ფილტრაციით და უწყვეტი $M=(M_t)_{0\le t\le T}$ ლოკალური მარტინგალით. $\mathcal{E}(M)$ -ით აღვნიშნოთ M -ის **სტოქასტური ექსპონენტა:** $\mathcal{E}_t(M)=\exp\left(M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)$.

თეორემა ვთქვათ a_s ჭვრეტადი პროცესია ისეთი, რომ $|a_s-1|\ge\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ და ამასთან $\sup\limits_{0\le\tau\le T} E\exp\left\{\int_0^\tau a_s dM_s+\int_0^\tau\left(\frac{1}{2}-a_s\right)d\langle M\rangle_s\right\}<\infty$ სადაც sup აიღება ყველა გაჩერების მომენტის მიმართ. მაშინ ნებისმიერი b_s ჭვრეტადი პროცესისათვის, რომლისთვისაც $|b_s-a_s|\le|a_s-1|$, $\mathcal{E}\left(\int bdM\right)$ იქნება თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალი. შევნიშნოთ, რომ $|b_s-a_s|\le|a_s-1|$ უტოლობას აკმაყოფილებს $b_s\equiv1$ და $b_s\equiv a_s$ კერძო შემთხვევები, ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ შედეგს, რომელიც არის ნოვიკოვ-კაზამაკის შერეული პირობის განზოგადება.

შედეგი. თუ სრულდება თეორემის პირობები, მაშინ $\mathcal{E}(M)$ და $\mathcal{E}\left(\int adM\right)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალებია.

ახლა შეგვიძლია გავაკეთოთ თეორემის დამტკიცების მოკლე მონახაზი. შემოვიღოთ შემთხვევითი პროცესი: $Y_t=E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int bdM\right)|\mathcal{F}_t\right]$ სადაც $\mathcal{E}_{t,T}\left(\int bdM\right)=\frac{\mathcal{E}_T\left(\int bdM\right)}{\mathcal{E}_t\left(\int bdM\right)}$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $Y_t\mathcal{E}_t\left(\int bdM\right)$ წარმოადგენს სუპერმარტინგალს, საიდანაც ჩვენ შეგვიძლია რომ Y_t პროცესისათვის გამოვიყვანოთ შესაბამისი შექცეული განტოლება. ამის შემდეგ კი შექცეული განტოლებების გამოყენებით ვაჩვენებთ, რომ $Y_0=E\mathcal{E}_T\left(\int bdM\right)=1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\mathcal{E}\left(\int bdM\right)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია.